МАКСИМИЗАЦИЯ ПРИБЫЛИ В МОДЕЛИ ГАЗОВОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ

Скиба А.К.

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Россия, г. Москва, ул. Вавилова 40

a.k.skiba@mail.ru,

Скиба Н.К.

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет» Россия, г. Краснодар, ул. Московская 2

n_skiba@mail.ru

Аннотация: Описывается непрерывная агрегированная динамическая модель добычи газа на газовом месторождении. Исследуются две стратегии разработки газового месторождения при заданных условиях. Основным математическим аппаратом является принцип максимума Понтрягина в форме Эрроу. Доказывается, что найденное оптимальное управление является единственным. Предлагается алгоритм численного поиска оптимального решения.

Ключевые слова: динамическая модель газового месторождения, задача оптимального управления со свободным правым концом, фиксированным временем и со смешанным ограничением, максимизация прибыли, стратегии разработки газового месторождения.

Введение

Россия – поистине уникальная страна, не похожая по многим важным показателям ни на какую другую в мире. Ее великая история интересна и охватывает тысячелетний период. На протяжении многих веков наше государство расширялось, богатело и укреплялось. Расширение ее территории в большинстве случаев шло на Восток за счет постепенного освоения, изучения и приращения слабо исследованных земель, которые часто не пригодны для жизни.

Российская Федерация расположена на большой территории в Азии и Восточной Европе. Россия является крупнейшей страной мира, имея значительную площадь, охватывающая 17075200 км2, что соответствует седьмой части всей земной суши. С севера на юг страна простирается более чем на 4000 км, а с запада на восток почти на 10000 км. С территорией России связано 11 часовых поясов, 8 из которых лежат в Сибири. Россию омывают 13 морей, одно из которых замкнутое. Она занимает уникальное геополитическое положение в Евразии, ее географическое положение, экономический, демографический и интеллектуальный потенциал, наличие сырья и ресурсов естественным образом сделали Россию важнейшим центром мировой политики.

Россия находится на стыке разных культурных миров: мира земледельческого и мира кочевников, миров европейского и азиатского, христианского и мусульманского, католического и православного. Гибкая внешняя и внутренняя политика российского государства позволило на протяжении многих веков сохранить православную религию как основу национального самосознания.

В России открыто множество месторождений полезных ископаемых. В недрах земли выявлены и разведаны многочисленные месторождения нефти, природного газа, каменного угля, руд чёрных, цветных, редких и благородных металлов, редкоземельных элементов, горно-химического нерудного технического сырья, драгоценных и поделочных камней и минеральных материалов. Можно утверждать, что в том или ином виде в недрах России содержится практически вся таблица Менделеева. Однако реальная количественная оценка запасов полезных ископаемых России затруднена, так как разные источники приводят разные данные, которые в отдельных случаях отличаются во много раз.

В последние несколько десятилетий мировая экономика растет, потребляя всё больше и больше энергоресурсов. Среди обширного перечня полезных ископаемых к наиболее востребованным энергоресурсам мы можем отнести такие извлекаемые из недр продукты, как уголь, нефть и природный газ. Несмотря на активную политику энергосбережения, общее потребление энергетических ресурсов на планете непрерывно растет. По мере роста энергопотребления всё больше стран ощущают недостаток в энергоресурсах из-за их дефицитности, На востоке нашей страны- это Южная Корея, Япония и Китай, на западе - это ряд стран Западной Европы. Особой популярностью на энергорынках этих стран пользуется экологически чистый продукт - природный газ[1].

Россия в состоянии добывать природный газ в больших объемах в течение достаточно длительного времени не только для внутренних нужд, но и для внешних потребителей, гарантируя потребителям долгосрочные устойчивые объемы его поставок. Однако места добычи и поставок потребителям природного газа разъединяются большими расстояниями, превышающие тысячи километров. В основном для доставки газа потребителям используют газопровод, ограничивающий пропускную способность поставляемого продукта.

Возникающие в этой связи ряд математических задач представляют научный интерес. Некоторые задачи уже решены, другие задачи находятся в стадии ожидания исследования.

В отделе Математических методов регионального программирования ФИЦ ИУ РАН на протяжении многих лет велись работы по математическому моделированию разработки нефтяных и газовых месторождений [2-4]. Данные модели при различных их модификациях подвергались всестороннему анализу. На них ставились и решались интересные оптимизационные задачи. Кроме того рассматриваемые в отделе динамические модели использовались для численных расчетов при решении многих практических задач.

Среди оптимизационных задач, поставленных и решенных, особый интерес представляют две задачи: задача максимизации накопленной добычи для группы газовых месторождений с ограничением на пропускную способность газопровода [5] и задача максимизации длины их общей "полки" [6]. Первая из приведенных задач имеет экономическое содержание, как максимизация совокупного дохода для группы газовых месторождений. Можно поставить и другие оптимизационные задачи с экономическим содержанием. Это минимизация затрат и максимизация прибыли.

Настоящая статья посвящена полному решению задачи максимизации прибыли с учетом коэффициента дисконтирования для одного газового месторождения. Данные задачи принадлежат к классу задач оптимального управления со смешанными ограничениями. Основным математическим аппаратом, используемый при их решении, является принцип максимума Понтрягина в форме Эрроу [7].

1 Принцип максимума Понтрягина в форме Эрроу

Во второй половине прошлого столетия была опубликована статья К. Эрроу [7], ставшего впоследствии лауреатом Нобелевской премии по экономике. В основе работы лежит принцип максимума Понтрягина [8].К. Эрроу модифицирует принцип и формулирует предложения, которые позволяют решать задачи оптимального управления со смешанными ограничениями. В предложения дополнительно включены некоторые элементы нелинейного программирования такие, как Лагранжиан, множители Лагранжа и условия дополняющей нежесткости. Автор настоящей статьи использовал модифицированный принцип в своей работе [9].

Предложение 1. Пусть $\tilde{v}(t)$ - управления при $t \in [0, T]$, которые максимизирует функционал

$$\int_0^T U[x(t), v(t), t]\, dt$$

при условии

(a) $$\dot{x}(t) = G[x(t), v(t), t],\ t \in [0, T]$$

и ограничениях на управления

(b) $$F[x(t), v(t), t] \geq 0.$$

По крайней мере, одно ограничение в неравенстве (b) содержат управления $v(t)$при $t \in [0, T]$.

Набор ограничений (b) может включать или не включать переменные состояния $x(t)$ при $t \in [0, T]$, начальные условия $x(t)$ при $t = 0$,и неотрицательные конечные условия $x(t)$ при $t = T$.

Если условия регулярности выполняется, то существуют сопряженные переменные $p(t)$ такие, что для каждого значения t

(c) $\tilde{v}(t)$ максимизирует $H[x(t), v, p(t), t]$ относительно ограничений (b), где

$$H(x. v, p, t)=U(x. v, t) + pG(x. v, t);$$

(d) $\dot{p}_i(t) = \frac{\partial L}{\partial x_i}$ при значениях $x = \tilde{x}(t), v = \tilde{v}(t), p = p(t)$, где

(e) $$L(x. v, p, q, t)=H(x. v, p, t) + qF(x. v, t).$$

Множители Лагранжа q таковы, что

(f) $$\frac{\partial L}{\partial v_k} = 0 \text{ при значениях } x = \tilde{x}(t), v = \tilde{v}(t), p = p(t), q(t) \geq 0,$$

$$q\,(t)F[x(t), v(t), t] = 0.$$

Если мы решаем задачу оптимального управления со свободным правым концом, то

(g) $$p(T) \geq 0 \text{ и } p(T)x(T) = 0.$$

В предложении 1 вектор $x(t)$ имеет размерность n, а вектор $v(t)$- размерность m. Обратите внимание, что если набор ограничений (b) состоит только из неравенств следующего вида:

(h) $$F[v(t)] \geq 0,$$

то задачу оптимального управления, сформулированную в предложении 1, может быть решена с использованием принципа максимума Понтрягина.

Перейдем к описанию модели и постановки задач

2 Построение модели и анализ некоторых стратегий освоения газового месторождения

Рассмотрим модель функционирования газового месторождения с взаимовлияющими скважинами [2-4]. Введем следующие обозначения:

t - время, будем считать, что мы наблюдаем за разработкой газового месторождения, начиная с момента $t = 0$;

$q(t)$ - средний дебит добывающих скважин в момент t;

q^0- начальный средний дебит добывающих скважин;

$n(t)$- количество скважин, вводимых в строй в единицу времени (следует отметить, что n величина целочисленная, но для простоты исследования будем допускать для нее любые неотрицательные действительные значения, что можно сделать ввиду большого количества скважин, обычно бурящихся на месторождении);

$\bar{n}(t)$ - максимальные возможности по вводу в строй новых скважин;

$\bar{N}(t)$ - общий фонд добывающих скважин в момент t;

$\bar{N}^0$ - начальный фонд добывающих скважин;

$N(t)$ - действующий фонд добывающих скважин в момент t;

$N'(t)$ - резервный фонд добывающих скважин в момент t;

$Q(t)$ - текущая добыча газа;

$\bar{Q}$ - пропусная способность трубопровода;

$V(t)$ - извлекаемый запас газа, оставшийся в месторождении в момент t;

V^0 - начальный извлекаемый запас газа;

δ - коэффициент дисконтирования;

c - продажная цена природного газа;

k- стоимость строительства одной скважины.

Между описанными выше переменными устанавливается взаимосвязь, которую мы запишем в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

(1) $$\dot{V}(t) = -Q(t) = -q(t)N(t),$$

(2) $$\dot{q}(t) = -\frac{q^0}{V^0}q(t)N(t) = -\alpha q(t)N(t),$$

(3) $$\dot{\bar{N}}(t) = n(t)$$

при ограничениях

(4) $$0 \leq N(t) \leq \bar{N}(t),$$

(5) $$0 \leq n(t) \leq \bar{n}(t)$$

с начальными условиями

(6) $$V^0 > 0,$$

(7) $$q^0 > 0,$$

(8) $$\bar{N}^0 \geq 0.$$

Заметим, что параметр $\alpha = \frac{q^0}{V^0}$, используемый в написании дифференциального уравнения (2), предназначен только для упрощения вида математических выражений. Кроме того, в любой момент t общий фонд скважин равен сумме резервных и действующих фондов скважин, т.е.

(9) $$\overline{N}(t) = N'(t) + N(t).$$

Предполагаем, что в любой момент t месторождение покрыто равномерной сеткой скважин. Управление динамическим процессом разработки месторождения осуществляется за счет ввода новых скважин $n(t)$. Кроме того, будем считать, что бурение скважины и её ввод в разработку месторождения происходят в один и тот же момент времени. Для иллюстрации возможностей модели рассмотрим две стратегии освоения одного газового месторождения.Стратегия 1. Предположим, что мы имеем одно месторождение с известным запасом газа объемом V^0 и один трубопровод с заданной его пропускной способностью $\overline{Q}$.

Необходимо нам в динамике определить величину действующего фонда скважин $N(t)$, которое обеспечивало нам полное извлечение всего запаса газа при постоянном заранее заданном уровне его добычи $\overline{Q}$.

Интерес в постоянном уровне добычи газа проявляется как со стороны потребителей газа, так и со стороны промысловиков. Потребителям газа постоянный уровень добычи необходим при решении вопроса о стабильном объёме закупок газа. Промысловикам постоянный уровень добычи необходим для закупки и настройки промыслового и транспортного оборудования под обеспечение добычи газа требуемого уровня. Приведённые выше доводы делают интересными теоретическое исследование данной стратегии освоения газового месторождения.

Перейдём к формальному описанию и исследованию упомянутого режима. Объем действующего фонда скважин описывается следующей формулой:

(10) $$N(t) = \frac{\overline{Q}}{q(t)} = \frac{\overline{Q}}{q^0 - \alpha\overline{Q}t}.$$

В последней формуле дебит скважины $q(t)$ изменяетмя по линейному закону.

Таким образом, мы определяем функция (10) на полуинтервале $[0.t^*)$, где $t^* = \frac{V^0}{\overline{Q}}$. Согласно рассматриваемой модели фазовая переменная $N(t)$ удовлетворяет неравенству (4) и соотношению $N(0) = \frac{\overline{Q}}{q^0} \leq \overline{N}^0$ в начальный момент. В конечный момент t^* происходит полное извлечение запасов газа из месторождения. В то же время $\lim_{t\to t^*} N(t) = \infty$. Следовательно, в этом случае сетка скважин должна быть уплотнена до бесконечности.

Эту стратегию невозможно полностью реализовать на практике. Однако она может быть реализована частично. Этапу постоянной добычи газа предшествует этап нарастающей добычи, который для небольших газовых месторождений может и отсутствовать. За этапом постоянной добычи следует этап падающей добычи.

Проблема увеличения периода постоянной добычи особо актуальна в настоящее время. Такая ситуация возникает, например, в случаях, когда неожиданно нарушаются объемы поставок с других газовых месторождения и в соответствии с договором между поставщиком и потребителем газа необходимо оперативно компенсировать появившуюся недостачу.

На рис. 1 схематично изображены в динамике два графика, относящиеся к добыче газа $Q(t)$ и к действующему фонду добывающих скважин $N(t)$.

Стратегия 2. Рассмотрим динамическое поведение описанной выше модели (1)-(8) на двух временных периодах разработки газового месторождения: на не нулевом первом периоде от 0 до t_1 темп разбуривания месторождения постоянен $n(t) = n$ и в дальнейшем при $t > t_1$ бурение новых скважин прекращается, т.е. $n(t) \equiv 0$.

Предполагая $\mathrm{N}^0 = 0$, получаем следующие основные динамические показатели:

(11) $$N(t) = \begin{cases} nt & \text{при } t \in [0, t_1] \\ nt_1 & \text{при } t > t_1; \end{cases}$$

$$(12) \qquad q(t) = \begin{cases} q^0 \, exp\left[-\dfrac{\alpha n t^2}{2}\right] & \text{при } t \in [0, t_1] \\ q(t_1)\, exp[-N(t_1)(t - t_1)] & \text{при } t > t_1; \end{cases}$$

$$(13) \qquad V(t) = \begin{cases} V^0 \; exp[-\alpha n t^2/2] & \text{при } t \in [0, t_1] \\ V(t_1)\, exp[-N(t_1)(t - t_1)] & \text{при } t > t_1; \end{cases}$$

$$(14) \qquad Q(t) = \begin{cases} q^0 n t \;\; exp[-\alpha n t^2/2] & \text{при } t \in [0, t_1] \\ q(t_1) N(t_1) \; exp[-N(t_1)(t - t_1)] & \text{при } t > t_1; \end{cases}$$

Исследование функции (14) показывает, что на начальном этапе бурения месторождения добыча газа $Q(t)$ на месторождении возрастает. Данный факт объясняется следующим образом. Увеличением прироста добычи газа за счет ввода в эксплуатацию новых скважин $n(t)$ превышает естественный темп снижения добычи. Если t_1 имеет небольшое значение, то в момент t_1 (в момент прекращения ввода новых скважин) добыча $Q(t)$ достигает максимального значения. В этом случае на графике мы могли бы наблюдать характерный ярко выраженный излом. Далее добыча газа падает.

Если t_1имеет значительную величину, то прирост добычи газа за счёт ввода новых скважин будет со временем постепенно уменьшаться, и в момент

$$(15) \qquad t_{max} = \sqrt{\frac{1}{\alpha n}}$$

прирост совпадёт с естественным темпом падения добычи. В этот момент текущая добыча достигает своего максимального значения

$$(16) \qquad Q_{max} = \sqrt{\frac{q^0 n V^0}{e}}.$$

В дальнейшем добыча газа падает. Такие характерные особенности поведения добычи газа наблюдались на практике при бурении газовых месторождений.

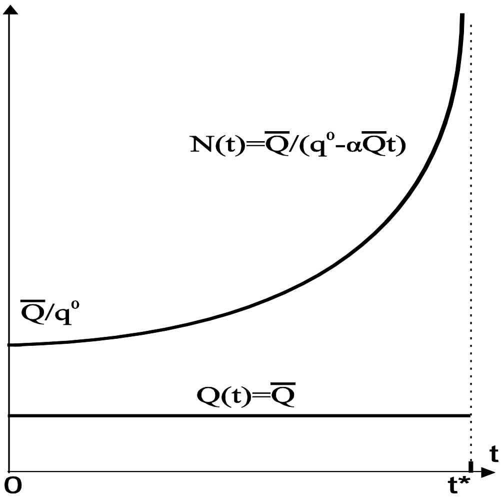

Рис. 1. Графики добычи газа $Q(t)$ и действующего фонда добывающих скважин $N(t)$

На рис. 2 схематично изображены в динамике основные показатели разработки газового месторождения: $n(t)$- количество скважин, вводимых в строй в единицу времени; $N(t)$ - действующий фонд добывающих скважин; $q(t)$ - средний дебит добывающих скважин в момент t; $Q(t)$ - текущая добыча газа. Дебит скважины $q(t)$ и добыча газа $Q(t)$ дважды изображены на этом рисунке. Один раз это связано со случаем, когда прирост добывающих скважин прекращается на этапе возрастающей добычи $Q(t)$. Другой раз - на этапе падающей добычи $Q(t)$.

На рис. 2 не изображена динамика извлекаемого запаса газа $V(t)$. В этом нет особой необходимости, т.к. дебит скважины $q(t)$отличается от извлекаемого запаса газа $V(t)$ на известную постоянную величину.

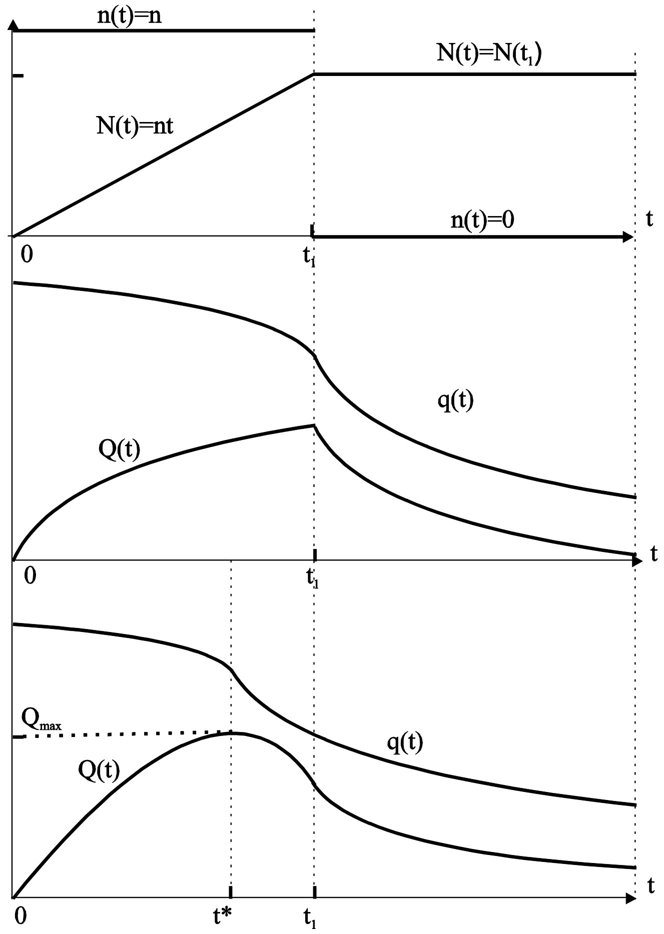

Рис. 2. Динамика основных показателей разработки газового месторождения: $n(t)$- количество скважин, вводимых в строй в единицу времени; $N(t)$ - действующий фонд добывающих скважин;$q(t)$ - средний дебит добывающих скважин в момент t; $Q(t)$ - текущая добыча газа

2 Постановка и решение задачи на максимум прибыли

Задача 1. О максимизации прибыли с учетом коэффициента дисконтирования для одного газового месторождения

Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1)-(3) с начальными условиями (6), (7) и

(17) $\overline{N}^0 = 0$

и фиксированного интервала времени $[0, \mathrm{T}]$ требуется найти функции $\tilde{\mathrm{n}}(\mathrm{t})$ и $\tilde{\mathrm{N}}(\mathrm{t})$, удовлетворяющие ограничениям (4), (5), и соответствующую этим функциям траекторию $(\tilde{\mathrm{q}}(\mathrm{t}), \tilde{\overline{\mathrm{N}}}(\mathrm{t}))$, которая доставляет максимальное значение функционалу

(18) $$\int_0^T [cQ\,(t) - kn(t)]\,exp[-\,\delta t]\ dt.$$

Правый конец оптимальной траектории $(\tilde{\mathrm{q}}(\mathrm{t}), \tilde{\overline{\mathrm{N}}}(\mathrm{t}))$ считается свободным. Функция $\overline{\mathrm{n}}(\mathrm{t})$ в двойном неравенстве (5) является постоянной величиной равной значению $\overline{\mathrm{n}} > 0$. В этом случае двойное неравенство (5) представится в следующей форме:

(19) $0 \le n(t) \le \bar{n}, \qquad \bar{n} > 0.$

Заметим, что дифференциальные уравнения (1) и (2) взаимосвязаны, и фазовые переменные $\mathrm{q}(\mathrm{t})$ и $\mathrm{V}(\mathrm{t})$ имеют между собой линейную зависимость при любых допустимых управлениях, т.е.

$\mathrm{q}(\mathrm{t}) = \alpha\mathrm{V}(\mathrm{t})$. Поэтому в дальнейшем достаточно ограничиться только двумя фазовыми переменными $\mathrm{q}(\mathrm{t})$ и $\overline{\mathrm{N}}(\mathrm{t})$. К управляющим параметрам относятся переменные $\mathrm{n}(\mathrm{t})$ и $\mathrm{N}(\mathrm{t})$.

В описании прибыли (18) включен коэффициент дисконтирования δ, позволяющий соизмерять доходы и затраты, производимые в различные моменты времени.

Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 1. Оптимальные управления $\tilde{n}(t)$ и $\widetilde{N}(t)$ в задаче максимизации прибыли существуют и единственны. Управляющая переменная $\tilde{n}(t)$ принимает один вид из двух возможных вариантов:

$$(20) \qquad \tilde{n}(t) = \begin{cases} \overline{n} & \text{при } t \in [0,\tau], \tau \in (0,T) \\ 0 & \text{при } t \in (\tau,T]; \end{cases}$$

$$(21) \qquad \tilde{n}(t) \equiv 0.$$

Другое оптимальное управление $\widetilde{N}(t)$ при всех значениях $t \in [0,T]$ принимает верхнюю границу неравенства (4), т.е.

$$(22) \qquad \widetilde{N}(t) = \overline{N}(t).$$

Доказательство. Рассматриваемая задача 2 является задачей оптимального управления со свободным правым концом фиксированным временем. Существование оптимального управления следует из теоремы, приведённой в монографии [10, § 4.2]. Доказательство единственности отнесено в конец теоремы 1.

Для решения задачи 1мы не можем использовать принцип максимума Понтрягина [8,11] в классической формулировке, поскольку в постановку задачи 1 включается смешанное ограничение (4).

Для решения этой задачи мы применяем принцип максимума Понтрягина в форме Эрроу [7].

Далее, для удобства исследования гамильтонианH, лагранжианL, сопряженные переменные $\psi(t)$ и $\varphi(t)$, множители Лагранжа $\beta_1, \beta_2, \gamma_1$ и γ_2 представляются в модифицированной форме. Такую же модифицированную форму использовал К. Эрроу в своей работе [7].

Согласно предложению 1, выпишем гамильтониан и лагранжиан

$$(23) \qquad H(q,N,n,\psi,\varphi) = cqN - kn - \psi\alpha qN + \varphi n,$$

$$(24) \qquad L(q,\overline{N},N,n,\psi,\varphi,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2)$$
$$= cqN - kn - \psi\alpha qN + \varphi n + \beta_1(\overline{N} - N) + \beta_2 N + \gamma_1(\bar{n} - n) + \gamma_2 n.$$

Обратим внимание, что в описании гамильтониана (22) в явном виде отсутствует фазовая переменная $\overline{N}(t)$, однакоона присутствует в описании лагранжиана.

В каждый момент $t \in [0,T]$ управления N и n максимизируют гамильтониан:

$$(25) \qquad H\left(\tilde{q}(t), \widetilde{N}(t), \tilde{n}(t), \psi(t), \varphi(t)\right) = \max_{N\in[0,\widetilde{\overline{N}}(t)];\, n\in[0,\overline{n}]} H\left(\tilde{q}(t), N, n, \psi(t), \varphi(t)\right).$$

Из (22) и (24) следует:

$$(26) \qquad \widetilde{N}(t) = \begin{cases} \widetilde{\overline{N}}(t) & \text{при } c > \alpha\psi(t), \\ 0 & \text{при } c \le \alpha\psi(t); \end{cases}$$

$$(27) \qquad \tilde{n}(t) = \begin{cases} \overline{n} & \text{при } \varphi(t) > k, \\ 0 & \text{при } \varphi(t) \le k. \end{cases}$$

Сопряженные уравнения представятся в виде:

$$(28) \qquad \dot{\psi} = \delta\psi - \frac{\partial L}{\partial q} = \delta\psi - cN + \psi\alpha N;$$

$$(29) \qquad \dot{\varphi} = \delta\varphi - \frac{\partial L}{\partial \overline{N}} = \delta\varphi - \beta_1.$$

Для множителей Лагранжа $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$справедливы следующие равенства:

$$(30) \qquad \frac{\partial L}{\partial N} = cq - \psi\alpha q + \beta_2 - \beta_1 = 0;$$

$$(31) \qquad \frac{\partial L}{\partial n} = \varphi - k + \gamma_2 - \gamma_1 = 0;$$

$$(32) \qquad \beta_1(\overline{N} - N) = 0, \qquad \beta_1 \ge 0;$$

(33) $\beta_2 N \quad = 0, \qquad \beta_2 \geq 0;$

(34) $\gamma_1(\bar{n} - n) = 0, \qquad \gamma_1 \geq 0;$

(35) $\gamma_2 n \quad = 0, \qquad \gamma_2 \geq 0.$

Равенства (31)-(34) являются условиями дополняющей нежесткости. На правых концах сопряженных переменных $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ выполняются условия трансверсальности:

(36) $\psi(T) = \varphi(T) = 0.$

Пусть в момент $\hat{t} \in [0, T]$ выполняется неравенство $c \leq \alpha\psi(\hat{t})$, тогда из (25), (27) и положительности $\psi(\hat{t})$ следует возрастание сопряженной переменной $\psi(t)$. Условия трансверсальности (35) нарушаются.

Значит, $c > \alpha\psi(t)$ и $\tilde{N}(t) = \tilde{\tilde{N}}(t)$ при всех $t \in [0, T]$. Из (32) вытекает $\beta_2 = 0$. С учетом (29) перепишем уравнения (27) и (28):

(37) $\dot{\psi} = \delta\psi - c\bar{N} + \psi\alpha\bar{N},$

(38) $\dot{\varphi} = \delta\varphi - cq + \psi\alpha q.$

Рассмотрим всевозможные начальные значения сопряженных переменных $\psi(t)$ и $\varphi(t)$, при которых данные сопряженные переменные могут удовлетворять или не удовлетворять условиям трансверсальности (35).

Утверждение 1.

1. Сопряженная переменная $\psi(t)$, соответствующая оптимальной траектории, неотрицательна.

2. Пусть выполнено равенство $\psi(\hat{t}) = 0$ при некотором значении $\hat{t} \in [0, T)$, тогда $\psi(t) \equiv 0$, $\tilde{n}(t) \equiv 0$ и справедливо следующее неравенство:

(39) $$\frac{cq^0}{\delta}[1 - exp(-\delta T)] \leq k.$$

Доказательство. Из сопряженного уравнения (36) видно, что при отрицательных значениях переменной $\psi(t)$ условия трансверсальности (35) не выполняются.

Переходим к рассмотрению второй части утверждения 1.

Из предположения $\psi(\hat{t}) = 0$ при $0 \leq \hat{t} < T$, условий трансверсальности (35) и сопряженного уравнения (36) вытекает, что $\psi(t) \equiv 0$, $\tilde{n}(t) \equiv 0, \tilde{\tilde{N}}(t) \equiv 0$ не только на временном интервале $[\hat{t}, T]$, но и на всем рассматриваемом периоде $[0, T]$. Значит, месторождение не подвергается разработке и дебит скважины $q(t) \equiv q^0$ на всем рассматриваемом периоде $[0, T]$.

С учетом условий трансверсальности (35) проинтегрируем дифференциальное уравнение (37) от 0 до T при условиях: $\psi(t) \equiv 0$ и $q(t) \equiv q^0$. В результате мы получаем

(40) $$\varphi(t) = \frac{cq^0}{\delta}\{1 - exp[-\delta(T - t)]\}.$$

Из (39) видно, что $\varphi(t)$ убывающая функция. Поскольку оптимальное управление $\tilde{n}(t) \equiv 0$ и при этом управлении достигается максимум гамильтониана, то $\varphi(0) \leq k$. Отсюда и из соотношения (39) следует выполнение неравенства (38). Утверждения 1 доказано.

Утверждение 2. Пусть $\left(\tilde{q}(t), \tilde{\tilde{N}}(t)\right)$ является оптимальной траекторией при дополнительном условии $\tilde{\tilde{N}}(T) > 0$, тогда:

1) на полуинтервале $t \in [0. T)$ выполняется двойное неравенство $0 < \psi(t) < \frac{c}{\alpha}$ и $\psi(T)=0$;

2) на полуинтервале $t \in [0. T)$ сопряженная переменная $\varphi(t)$ положительна и строго убывает и $\varphi(T) = 0$.

Доказательство. Умножаем обе части сопряженного уравнения (36) на q и после несложных преобразований с учетом (2) получаем

(41) $$\frac{d}{dt}[\psi q] = \delta\psi q - cq\bar{N}.$$

Умножим обе части дифференциального уравнения (40) на $\exp(-\delta t)$ и после несложных преобразований проинтегрируем обе части полученного равенства от t до T. Учитывая условия трансверсальности (35), приходим к соотношению

$$(42) \qquad \psi(t)q(t)\, exp(-\delta t) \;= c\int_t^T q(\theta)\,\bar{N}(\theta)exp(-\delta\theta)d\theta.$$

В силу положительности $q(t)$ и $\overline{N}(T)$, непрерывности и неотрицательности $\overline{N}(t)$ вытекает, что интеграл в правой части равенства (41) положителен. Отсюда положительна сопряженная переменная $\psi(t)$ при $t \in [0.T)$ и $\psi(T)$=0.

Принимая во внимание (2), преобразуем (40). В результате получаем следующее дифференциальное уравнение

$$(43) \qquad \frac{d}{dt}\left[\left(\psi-\frac{c}{\alpha}\right)q\, exp(-\delta t)\right]=\frac{c\delta}{\alpha}qexp(-\delta t).$$

С учетом условия трансверсальности (35) проинтегрируем обе части полученного соотношения (42) от t до T

$$(44) \qquad \left[\frac{c}{\alpha}-\psi(t)\right]q(t)exp(-\delta t)=\frac{c}{\alpha}q(T)exp(-\delta T)+\frac{c\delta}{\alpha}\int_t^T q(\theta)exp(-\delta\theta)d\theta.$$

Правая часть равенства (27) положительна. Значит, $\psi(t)<\frac{c}{\alpha}$. Первая часть данного утверждения доказана. Переходим к доказательству последней части утверждения 2.

С сопряженным уравнением (37) проделаем те же операции, что и с уравнением (36). После всех преобразований решение сопряженного уравнения (37) представится в виде интегрального выражения

$$(45) \qquad \varphi(t)=\int_t^T[c-\alpha\psi(\theta)]q(\theta)\exp[-\delta(\theta-t)]\,d\theta=\exp[\delta t]\int_t^T[c-\alpha\psi(\theta)]q(\theta)\exp[-\delta\theta]\,d\theta\,.$$

Отсюда следует, что сопряженная переменная $\varphi(t)$ положительна на полуинтервале $t \in [0.T)$. Умножаем обе части сопряженного уравнения (36) на q и после преобразований с учетом (2) получаем

$$(46) \qquad \frac{d}{dt}[\alpha\psi q-cq]=\delta\alpha\psi q.$$

Продифференцируем по t обе части сопряженного уравнения (37) и, подставив в полученное выражение (45), приходим к следующему дифференциальному уравнению второго порядка

$$(47) \qquad \ddot{\varphi}-\delta\dot{\varphi}=\alpha\delta\psi q.$$

Умножаем обе части дифференциального уравнения (46) на $\exp(-\delta t)$ и после преобразований с учетом (2), (35) и (37) проинтегрируем от t до T полученный результат

$$\dot{\varphi}(t)=\dot{\varphi}(T)\exp[-\delta(T-t)]-\delta\alpha\int_t^T\psi(\theta)q(\theta)\exp[-\delta(\theta-t)]\,d\theta=$$

$$-cq(T)\exp[-\delta(T-t)]-\delta\alpha\int_t^T\psi(\theta)q(\theta)\exp[-\delta(\theta-t)]\,d\theta.$$

Отсюда следует, что сопряженная переменная $\varphi(t)$ строго убывает. Утверждение 2 доказано.

Из утверждений 1 и 2 вытекает справедливость одного из соотношений (19) или (20). Переходим к доказательству единственности оптимальных управлений.

Для наглядности изложения материала мы надчеркивание у переменных здесь и далее опускаем.

Схема доказательства единственности состоит в следующем. Преобразовываем сопряженную переменную $\varphi(t)$ из (44). Устанавливаем зависимость $\varphi(\tau)$. Доказываем монотонность функции $\varphi(\tau)$.

Отсюда следует, что уравнение $\varphi(\tau)=k$ на отрезке $[0,T]$ имеет не более одного решения. Далее мы доказываем единственность.

Пусть решение задачи 1 описывается формулой (19). В этом случае с учетом (2), (3), (7) и (17) общий фонд добывающих скважин и дебит скважин изменяются следующим образом:

(48) $$N(t) = \begin{cases} nt & \text{при } t \in [0,\tau], \tau \in (0,T), \\ n\tau & \text{при } t \in (\tau, T]; \end{cases}$$

(49) $$q(t) = \begin{cases} q^0\, exp[-\dfrac{\alpha n t^2}{2}] & \text{при } t \in [0,\tau], \tau \in (0,T), \\ q^0\, exp[\alpha n(\dfrac{\tau^2}{2} - \tau t)] & \text{при } t \in (\tau, T]. \end{cases}$$

Представим в формуле (44) сопряженную переменную $\varphi(t)$ при $\tau \le t \le T$ в виде разности двух интегралов:

(50) $$\varphi(t) = \int_t^T cq(\theta)\, exp[-\delta(\theta - t)]\, d\theta - \alpha \int_t^T \psi(\theta) q(\theta)\, exp[-\delta(\theta - t)]\, d\theta = I_1 - I_2.$$

С учетом (2), (3), (17) и (19) преобразуем интеграл I_1:

(51) $$I_1 = \int_t^T cq(\theta)\, exp[-\delta(\theta - t)]\, d\theta = \int_t^T cq(t)\, exp[-(\alpha n\tau + \delta)(\theta - t)]\, d\theta =$$
$$\frac{cq(t)}{\alpha n \tau + \delta}(1 - \exp[-(\alpha n\tau + \delta)(T - t)]).$$

С учетом (47), (48) и $\tau \le t \le T$ преобразуем соотношение (41)

$$\psi(t)q(t) = cq(t)n\tau \int_t^T \exp[-(\alpha n\tau + \delta)(\theta - t)]\, d\theta = \frac{cq(t)n\tau}{\alpha n\tau + \delta}(1 - \exp[-(\alpha n\tau + \delta)(T - t)]).$$

Отсюда при $\tau \le t \le \theta \le T$ получаем

(52) $$\psi(\theta)q(\theta)\, exp[-\delta(\theta - t)] = \frac{cq(\theta)n\tau}{\alpha n\tau + \delta}\{1 - exp[-(\alpha n\tau + \delta)(T - \theta)]\}\, exp[-\delta(\theta - t)] =$$
$$\frac{cq(t)n\tau}{\alpha n\tau + \delta}\{1 - \exp[-(\alpha n\tau + \delta)(T - \theta)]\}\exp[-(\alpha n\tau + \delta)(\theta - t)].$$

Используя (51), преобразуем интеграл I_2 из (49):

(53) $$I_2 = \alpha \int_t^T \psi(\theta) q(\theta)\, exp[-\delta(\theta - t)]\, d\theta =$$
$$\frac{cq(t)\alpha n\tau}{\alpha n\tau + \delta} \int_t^T \{1 - exp[-(\alpha n\tau + \delta)(T - \theta)]\}\, exp[-(\alpha n\tau + \delta)(\theta - t)]\, d\theta =$$
$$\frac{cq(t)\alpha n\tau}{(\alpha n\tau + \delta)^2}\{1 - exp[-(\alpha n\tau + \delta)(T - t)]\} - \frac{cq(t)\alpha n\tau}{\alpha n\tau + \delta}(T - t)\, exp[-(\alpha n\tau + \delta)(T - t)];$$

С учетом (50) и (52) перепишем функцию (49):

(54) $$\varphi(t) = \frac{cq(t)}{\alpha n\tau + \delta}[1 - e^{-(\alpha n\tau + \delta)(T - t)}] - \frac{cq(t)\alpha n\tau}{(\alpha n\tau + \delta)^2}[1 - e^{-(\alpha n\tau + \delta)(T - t)}] +$$
$$\frac{cq(t)\alpha n\tau}{\alpha n\tau + \delta}(T - t)e^{-(\alpha n\tau + \delta)(T - t)}.$$

В (53) подставим (49) при $t = \tau$. В результате получаем

(55) $$\varphi(\tau) = cq^0 e^{-\frac{\alpha n\tau^2}{2}}\{\frac{\delta}{(\alpha n\tau + \delta)^2}[1 - e^{-(\alpha n\tau + \delta)(T - \tau)}] + \frac{\alpha n\tau}{\alpha n\tau + \delta}(T - \tau)\, e^{-(\alpha n\tau + \delta)(T - \tau)}\}.$$

Продифференцируем функцию $\varphi(\tau)$:

(56) $$\varphi'_\tau = -cq^0 \alpha n\tau e^{-\frac{\alpha n\tau^2}{2}}\{\delta \frac{1 - e^{-(\alpha n\tau + \delta)(T - \tau)}}{(\alpha n\tau + \delta)^2} + \frac{\alpha n\tau(T - \tau)}{\alpha n\tau + \delta} e^{-(\alpha n\tau + \delta)(T - \tau)}\} +$$
$$cq^0 e^{-\frac{\alpha n\tau^2}{2}}[-\frac{(\alpha n)^2\tau(T - \tau)e^{-(\alpha n\tau + \delta)(T - \tau)}}{(\alpha n\tau + \delta)^2} + \alpha n\tau(T - \tau)e^{-(\alpha n\tau + \delta)(T - \tau)} - \frac{\tau[\alpha n(T - \tau)]^2}{\alpha n\tau + \delta} e^{-(\alpha n\tau + \delta)(T - \tau)}$$
$$+$$
$$\frac{\alpha n(T - \tau)e^{-(\alpha n\tau + \delta)(T - \tau)}}{\alpha n\tau + \delta} - \frac{\alpha n\tau}{\alpha n\tau + \delta} e^{-(\alpha n\tau + \delta)(T - \tau)} - \frac{2\delta\alpha n(1 - e^{-(\alpha n\tau + \delta)(T - \tau)})}{(\alpha n\tau + \delta)^3} -$$
$$\frac{\delta e^{-(\alpha n\tau + \delta)(T - \tau)})}{\alpha n\tau + \delta} + \frac{\delta\alpha n(T - \tau)e^{-(\alpha n\tau + \delta)(T - \tau)})}{(\alpha n\tau + \delta)^2}].$$

Докажем, что $\varphi'_\tau < 0$ при $\tau \in [0,T]$. Все члены математического выражения разбиваем на три непересекающиеся группы. Каждую группу выделяем фигурными скобками с положительным множителем. Дополнительно вводим обозначения F_1, F_2 и F_3.

$$\varphi'_\tau = cq^0\alpha n\tau e^{-\frac{\alpha n\tau^2}{2}}\{-\delta\frac{1-e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)}}{(\alpha n\tau+\delta)^2} - \frac{\alpha n\tau(T-\tau)}{\alpha n\tau+\delta}e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)} + (T-\tau)e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)}\} + \tag{57}$$
$$cq^0 e^{-\frac{\alpha n\tau^2}{2}}\{\frac{\alpha n(T-\tau)e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)}}{\alpha n\tau+\delta} + \frac{\delta\alpha n(T-\tau)e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)})}{(\alpha n\tau+\delta)^2} - \frac{2\delta\alpha n\left(1-e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)}\right)}{(\alpha n\tau+\delta)^3} -$$
$$\frac{(\alpha n)^2\tau(T-\tau)e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)}}{(\alpha n\tau+\delta)^2}\} + cq^0e^{-\frac{\alpha n\tau^2}{2}}\{-\frac{\tau[\alpha n(T-\tau)]^2}{\alpha n\tau+\delta}e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)} - e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)}\}=$$
$$cq^0\alpha n\tau e^{-\frac{\alpha n\tau^2}{2}}F_1 + cq^0e^{-\frac{\alpha n\tau^2}{2}}F_2 + cq^0e^{-\frac{\alpha n\tau^2}{2}}F_3.$$

Функция F_3 отрицательна, т.к. она содержит только отрицательные члены. Покажем, что функции F_1 и F_2 отрицательны при $\tau \in [0,T]$. Действительно:

$$F_1 = -\delta\frac{1-e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)}}{(\alpha n\tau+\delta)^2} - \frac{\alpha n\tau(T-\tau)}{\alpha n\tau+\delta}e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)} + (T-\tau)e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)} =$$
$$e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)}\delta[-\frac{e^{(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)}-1}{(\alpha n\tau+\delta)^2} + \frac{T-\tau}{\alpha n\tau+\delta}] = -\frac{\delta e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)}}{(\alpha n\tau+\delta)^2}\left[e^{(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)} - 1 - (\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)\right] < 0;$$

$$F_2 = \frac{\alpha n(T-\tau)e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)}}{\alpha n\tau+\delta} + \frac{\delta\alpha n(T-\tau)e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)})}{(\alpha n\tau+\delta)^2} - \frac{2\delta\alpha n(1-e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)})}{(\alpha n\tau+\delta)^3} - \frac{(\alpha n)^2\tau(T-\tau)e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)}}{(\alpha n\tau+\delta)^2} =$$
$$\frac{\alpha n}{(\alpha n\tau+\delta)^2}[\alpha n\tau(T-\tau)e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)} + 2\delta(T-\tau)e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)} - \frac{2\delta\left(1-e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)}\right)}{\alpha n\tau+\delta} -$$
$$\alpha n\tau(T-\tau)e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)}] = -\frac{2\delta\alpha n e^{-(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)}}{(\alpha n\tau+\delta)^3}\left[e^{(\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)} - 1 - (\alpha n\tau+\delta)(T-\tau)\right] < 0.$$

Значит, функция $\varphi(t)$ строго убывает на отрезке $[0,T]$. Если $\varphi(0) < k$, то уравнение $\varphi(t) = k$ имеет единственное решение $\tau > 0$. В противном случае $\tau = 0$. Следовательно, τ однозначно определяет единственным образом оптимальные управления. Единственность и теорема 1 доказаны.

Следствие 1. Пусть выполнено неравенство

$$\frac{cq^0}{\delta}[1 - exp(-\delta T)] > k, \tag{58}$$

тогда на оптимальной траектории $\tilde{\tilde{N}}(T) > 0$.

Положительность $\tilde{\tilde{N}}(T)$ вытекает из утверждения 1, дифференциального уравнения (3), начального условия (17) и ограничений на управление (19).

Экономическая целесообразность разработки газового месторождения оптимальным способом вытекает из выполнения неравенства (57).

Следствие 2. Пусть выполнено неравенство

$$\frac{cq^0}{\delta}[1 - exp(-\delta T)] \le k, \tag{59}$$

тогда на оптимальной траектории $\tilde{\tilde{N}}(t) \equiv 0$.

Из (48) следует, что месторождение экономически не выгодно разрабатывать, даже оптимальным способом.

В завершении данного параграфа приведем алгоритм вычисления максимума прибыли. Для этого достаточно определить параметр τ из формулы (19) теоремы 1. Сначала вычисляем $\varphi(0)$ и сравниваем с величиной k. Если $\varphi(0) < k$, полагаем $\tau = 0$. В противном случае для определения единственного решения уравнения $\varphi(\tau) = k$ можно использовать различные широко известные методы. Наиболее простым методом является метод деления отрезка пополам. В качестве +начальных точек можно взять значения 0 и T.

Заключение

В настоящей работе исследуется непрерывная агрегированная динамическая расширенная модель освоения газового месторождения с взаимовлияющими скважинами. На базе рассматриваемой модели аналитически подвергаются анализу две стратегии освоения газового месторождения. Каждая стратегия разработки сопровождается графиками, представленными на отдельном рисунке.

Первая стратегия представляет теоретический интерес, и она связана с попыткой как можно дольше удержать добычу газа на заранее заданном уровне. Было показано, что такой временной период конечен. Данный факт объясняется наличием ограниченного запаса газа. В конце всего временного периода количество всех действующих в разработке скважин стремительно неограниченно увеличивается, что практически невозможно.

Во второй стратегии анализируется инамическое поведение добычи на газовом месторождении. Модель исследуется на двух этапах. На первом этапе разработки действующий фонд скважин, начиная с нулевого значения, меняется по линейному закону с постоянным темпом. Выявлены и обсуждены характерные особенности такой разработки.

Последняя часть работы посвящена решению оптимизационной задачи на максимум прибыли с учетом дисконтирования. Рассматриваемая задача являются задачей оптимального управления со смешанными ограничениями. Применять в этом случае принцип максимума Понтрягина в классической формулировке не правомочно. Для решения этой задачи был использован принцип максимума Понтрягина в форме Эрроу. Для решения задачи на максимум прибыли было найдено оптимальное управление и доказано его единственность. Предложен алгоритм поиска оптимального решения.

Литература

1. *Вяхирев Р.И., Коротаев Ю.П., Кабанов Н.И.* Теория и опыт добычи газа. – М.: Недра, 1998. – 480с.
2. *Хачатуров В.Р., Соломатин А.Н., Злотов А.В. и др.* Планирование и проектирование освоения нефтегазодобывающих регионов и месторождений: Математические модели, методы, применение. / Под ред. В.Р. Хачатурова. – М.: УРСС:ЛЕНАНД, 2015. – 304с.
3. *Маргулов Р.Д., Хачатуров В.Р., Федосеев А.В.* Системный анализ в перспективном планировании добычи газа. – М.: Недра, 1992. – 288с.
4. *Skiba A.K.* Dynamic model analysis of gas deposit developments. // 2018 Eleventh International Conference Management Of Large-Scale System Development (MLSD). IEEE Conference Publications, IEEE Xplore Digital Library. – P. 619-622.
5. *Skiba A.K.* Maximization of the Accumulated Extraction in a Gas Fields Model. // In: Evtushenko Y., Jacimovic M., Khachay M., Kochetov Y., Malkova V., Posypkin M. (eds), Int. Conf. on Optimization and Applications (OPTIMA 2018) // Communications in Computer and Information Science, Springer. 2019. Vol. 974. – P. 453-469. DOI 10.1007/978-3-030-10934-9_32.
6. *Скиба А.К.* Поиск в модели газовых место рождений максимальной длины их общей "полки". // Труды МФТИ. 2019. Т. 11, № 2(42). – С. 49-61.
7. *Эрроу К.* Применение теории управления к экономическому росту// Матем. экономика. – М.: Мир, 1974. – С. 7-45.
8. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. – 393с.
9. *Skiba A.K.* Optimal Growth with a Convex-concave Production Function // Econometrica. – 1978. – V. 3(46). – P. 527-539.
10. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972. – 576с.
11. *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1975. – 528с.