ПОРТФЕЛЬ СМЕШАННЫХ ИНВЕСТИЦИЙ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕНИЯ ВЫБОРА АКТИВОВ

Сыроваткин А.С.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65
sibadi@gmail.com

Аннотация: Предложен метод формирования и оптимизации смешанного инвестиционного портфеля, в условиях ограничений, выражаемых в обязанности запуска части реальных проектов.

Ключевые слова: инвестиции, инвестиционный портфель, портфель реальных проектов, смешанный инвестиционный портфель, инвестиции предприятия, ограничения смешанного инвестиционного портфеля

Введение

Современная экономическая реальность все дальше уходит от классического рыночного регулирования. Все реже можно применить понятие свободного рынка и если он встречается, то только в отдельных узких рыночных нишах. В остальных случаях, в том или ином виде, присутствует внешнее влияние, смещающее естественный баланс.

Особенно ярко это прослеживается на международных рынках. Мы видим различные протекционные механизмы, с помощью которых государства продвигают своих производителей и продавцов и стараются всячески затруднить продвижение товаров и услуг государств конкурентов. Порой такое регулирование не ограничивается субсидированием и пошлинами, а выражается и недружественными действиями в виде информационных атак, санкций и пр., вплоть до развязывания военных конфликтов.

На фоне описанных рыночных изменений, возникают ситуации, в которых инструменты, применяемые экономистами ранее, перестают работать и требуют модернизации для их использования. Одной из таких ситуаций является необходимость формирования инвестиционного портфеля смешанных инвестиций с включением в него одного или нескольких проектов реальных инвестиций, реализация которых инвестором обязательна, так как обуславливает предоставление дополнительных возможностей и дальнейшее управление им.

1 Методы и материалы

1.1 Описание проблемы

Инвестиционная деятельность всегда связана с риском. С самого ее зарождения инвесторы ищут приемы и механизмы, что бы этот риск сократить. Очевидным способом является реализация старой поговорки «не клади все яйца в одну корзину» в виде распределения ресурсов по разным активам. Такая стратегия, несомненно, более выигрышная относительно вложения в один актив, понятная и потому весьма популярная с давних времен. Но в большинстве своем, если и была какая-то система выбора активов, в которые стоит вкладываться, то скорей всего она была основана на интуиции и жизненном опыте и не имела какой-то строгой формализации.

Со временем, когда математика все больше начала приходить в повседневную жизнь человека, появилось понимание, что ее сила может быть использована и в процессе инвестирования. Есть предположение [1], что начало современным математическим моделям, используемым в финансах, было заложено в 1900 году Луи Башелье в его диссертации «Теория спекуляций», где рассматривалась возможность для расчёта цен опционов использовать броуновское движение

Но, несомненно, наибольшие влияние на современные подходы к портфельному инвестированию оказал пионер этого направления, сформулировавший первые подходы по формированию инвестиционного портфеля, американский ученый, впоследствии получивший Нобелевскую премию, Гарри Марковец. В своей работе 1952 года «Выбор портфеля» [2], он заложил основы портфельной теории, впервые предложив математическую модель, позволяющую находить оптимальный инвестиционный портфель.

Он предложил использовать теории вероятностей и оптимизации для моделирования поведения агентов финансовых рынков. Предполагается установить баланс между максимизации прибыли и минимизации риска инвестиционных решений. Доход высчитывается как среднее, а риск как стандартное отклонение доходности. Эти математические представления доходности и риска позволили использовать инструменты оптимизации для анализа и управления инвестиционным портфелем. Не смотря на то, что часть утверждений Марковица подвергается критике и в дальнейшем была пересмотрена, его вклад в развитие финансовой математики трудно переоценить.

Марковиц и его последователи, в целях формирования инвестиционного портфеля, рассматривали исключительно ценные бумаги, акции и впоследствии облигации, оставляя за границами своего внимания объекты реальных инвестиций. И на это были причины. Основные сложности при использовании проектов реальных инвестиций – оценка стоимости и риска. Над вопросом правильной оценки стоимости предприятия и рисков в целях использования в качестве актива инвестиционного портфеля экономисты бьются ни один десяток лет. Бухгалтерский подход оценки предприятия по совокупности остаточной стоимости основных средств, бухгалтерских активов и пассивов не подходит, так как не учитывает перспектив развития, будущей прибыли, рыночной ситуации в части производимой продукции и пр.

Однако последние десятилетия видно значительное увеличение интереса к институциональным инвестициям. Конечно, основная часть все так же использует ценные бумаги, как основу инвестиционной деятельности, но нельзя не отметить увеличение различных форм альтернативных инвестиционных инструментов, например, венчурный капитал, использование частного капитала, частного займа, объектов недвижимости и пр. Как уже отмечалось, диверсификация в различные виды активов может значительно снизить совокупный портфельный риск, при этом, на долгий срок, увеличив потенциал для получения выгоды.

Исходя из вышесказанного, внимание к возможностям формирования смешанного инвестиционного портфеля, включающего в себя наряду с ценными бумагами, проекты реальных инвестиций, выросло. Как следствие, появился ряд научных работ, целью которых стало стремление предложить заинтересованным сторонам рабочий инструмент, позволяющий формировать оптимальный портфель смешанных инвестиций и в дальнейшем управлять им.

В данной области можно отметить работу Робичека и Майерса [3], в чьем методе инвестор определяет безрисковый эквивалент для движения денежных средств за каждый период, а потом приводит его обратно к своей текущей стоимости используя безрисковую ставку. Этот подход развил Хиллер [4], который так же использует единый безрисковый эквивалент, сначала определяя денежные потоки, которые проект получает в разных сценариях, а затем считая NPV этих потоков по безрисковой процентной ставке.

Идея метода, предложенного Смитом и Нау [5], заключается в явном учёте торговли ценными бумагами в каждом узле дерева решений. Проанализировав недостатки существующих методов, Густафссон и Сало [6] создали модификацию метода Смита и Нау в котором решения по управлению рассматриваемыми проектами структурированы в виде деревьев решений по конкретным проектам. Разработанный подход получил название «метод условного портфельного программирования».

Описанные выше подходы имеют свои плюсы и минусы, в зависимости от которых уместны к использованию в тех или иных ситуациях. Более подробно упомянутые методы были разобраны в предыдущих публикациях [7].

Отдельно стоит упомянуть подход, отрицающий традиционный взгляд на доходность и оценку риска согласно портфельной теории Марковица и предлагающий использование нечетких множеств и нечеткой математики для формирования инвестиционного портфеля и в частности портфеля смешанных инвестиций, состоящего из ценных бумаг и реальных проектов. Здесь можно выделить работы [8] и [9].

Не смотря на достаточно обширный список работ посвященных разным подходам к оценке проектов, одним, из наиболее популярных, остается NPV. Например, в относительно недавней работе [10] рассматривается подход к формированию оптимального портфеля смешанных инвестиций и стратегия дальнейшего управления им с помощью стратегии реинвестирования с использованием NPV.

Как упоминалось во введении, современные рынки имеют чрезмерное стороннее влияние. Наиболее ярко это проявляется при конкуренции различных государств на международных рынках, где мы видим, как явный так и опосредованный протекционизм собственным производителям и недружественную политику в отношении их конкурентов.

В таких условиях возникают ситуации, когда классические экономические инструменты работают слабо или неприменимы вовсе. Одной из таких ситуаций является формирование портфеля смешанных инвестиций в условиях, когда инвестор не может отказаться от запуска одного или нескольких проектов реальных инвестиций, но вправе включать в портфель в целях его диверсификации и оптимизации, другие проекты и ценные бумаги.

1.2 Описание модели

Предположим, инвестор планирует вложить имеющиеся у него средства в ряд проектов, по одному или нескольким из которых у него есть строгие обязательства реализации. Кроме обязательных проектов, в целях диверсификации и оптимизации, инвестор хочет рассмотреть возможность запуска одного или нескольких необязательных проектов. Для этих же целей и для использования временно свободных денежных средств, часть активов инвестор планирует разместить в ценных бумагах.

Для формирования оптимизационной модели, возьмем за основу предложенную в [10], доработав ее путем ввода дополнительных переменных, описывающих параметры проектов реальных инвестиций обязательных к реализации.

Параметры, описывающие проекты и ценные бумаги:

S - общее количество инвестиционных периодов в инвестиционном горизонте проектов;

D_i - количество последовательных временных промежутков, необходимых для завершения инвестиционного проекта i, $i = 1, 2. \cdots, m$, предполагая, что $1 \leq D_1 \leq D_2 \leq \cdots \leq D_m = S$;

T_i - продолжительность жизненного цикла инвестиционного проекта i, , $i = 1, 2. \cdots, m$;

$O_{i,t}$ - сумма оттока денежных средств выбираемый инвестиционного проекта i, , $i = 1, 2. \cdots, m$, в период t, $t = 0, 1. \cdots, D_i - 1$;

$N_{i,t}$ - случайный чистый приток денежных средств в выбираемый проект i, $i = 1, 2. \cdots, m$, во время t, $t = D_i, D_i + 1, \cdots, T_i$;

$Q_{j,t}$ - сумма оттока денежных средств инвестиционного проекта j, $j = 1, 2. \cdots, l$, обязательного к реализации, во время t, $t = 0, 1, \cdots, D_j - 1$;

$B_{j,t}$ - случайный чистый приток денежных средств в проект обязательный к реализации j, $j = 1, 2. \cdots, l$, во время t, $t = D_i, D_i + 1, \cdots, T_i$;

W_t - сумма капитала инвестора доступная во время t, $t = 0, 1. \cdots, S - 1$;

r - ставка дисконтирования или требуемая ставка доходности проекта;

$p_{k,0}$ - стоимость ценной бумаги k, $k = 1, 2. \cdots, n$ во время 0

$p_{k,t}$ - стоимость ценной бумаги k, $k = 1, 2. \cdots, n$ во время $t \neq 0$

$\xi_{k,t}$ - случайная ставка по ценной бумаги k, в инвестиционный период t, без учета затрат по сделке, определяется как $\xi_{k,t} = \frac{p_{k,t} - p_{k,t-1}}{p_{k,t-1}}, k = 1,2, \cdots, n, t = 1,2, \cdots, S$.

λ - количество ценных бумаг в минимальном лоте для любой транзакции;

c^+ - ставка транзакционных издержек при покупке ценных бумаг;

c^- - ставка транзакционных издержек при продаже ценных бумаг;

Параметры, описывающие решения:

x_i - бинарная переменная, описывающая, был ли проект i выбран для реализации

$$\begin{cases} 1, \text{если проект } i \text{ выбран} \\ 0, \text{если нет} \end{cases}, i = 1,2, \cdots, m;$$

$y_{k,0}$ - количество лотов ценной бумаги k, $k = 1, 2. \cdots, n$, приобретенных к началу первого периода;

$y_{k,\mathrm{t}}{}^{+}$ - количество лотов ценной бумаги k, $k = 1, 2. \cdots, n$, приобретенных в период t, $t = 0, 1. \cdots, S - 1$;

$y_{k,\mathrm{t}}{}^{-}$ - количество лотов ценной бумаги k, $k = 1, 2. \cdots, n$, проданных в период t, $t = 0, 1. \cdots, S - 1$;

$y_{k,0}$, $y_{k,\mathrm{t}}{}^{-}$, $y_{k,\mathrm{t}}{}^{+}$ - являются целыми и не могут быть меньше нуля и как минимум одна из переменных $y_{k,\mathrm{t}}{}^{-}$, $y_{k,\mathrm{t}}{}^{+}$ в каждый период времени t равна 0, т.е.

$$\mathrm{y_{k,0}}, \mathrm{y_{k,t}}^{+}, \mathrm{y_{k,t}}^{-} \geq 0, \mathrm{y_{k,0}}, \mathrm{y_{k,t}}^{+}, \mathrm{y_{k,t}}^{-} \in \mathrm{Z}, \left|\mathrm{y_{k,t}}^{+} - \mathrm{y_{k,t}}^{-}\right| = \mathrm{y_{k,t}}^{+} - \mathrm{y_{k,t}}^{-}.$$

Возврат инвестиций, получаемый через NPV, от проектов, как выбираемых, так и обязательных к реализации, на момент времени $t = 0$ представлен в формуле (1):

$$(1) \qquad \mathrm{R_1} = \left(\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{m}} \sum_{\mathrm{t=D_i}}^{\mathrm{T_i}} \frac{\mathrm{N_{i,t} \cdot x_i}}{(1+\mathrm{r})^{\mathrm{t}}} - \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{m}} \sum_{\mathrm{t=0}}^{\mathrm{D_i - 1}} \frac{\mathrm{O_{i,t} \cdot x_i}}{(1+\mathrm{r})^{\mathrm{t}}}\right) + \left(\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{l}} \sum_{\mathrm{t=D_j}}^{\mathrm{T_i}} \frac{\mathrm{B_{j,t}}}{(1+\mathrm{r})^{\mathrm{t}}} - \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{l}} \sum_{\mathrm{t=0}}^{\mathrm{D_j - 1}} \frac{\mathrm{Q_{j,t}}}{(1+\mathrm{r})^{\mathrm{t}}}\right)$$

В начале каждого из инвестиционных периодов, инвестор может покупать и/или продавать ценные бумаги. Так как инвестиционный горизонт заканчивается в период S, в котором операции с ценными бумагами уже не возможны, то количество бумаг в период $S = S - 1$ и количество лотов ценной бумаги k во время t представлено в формулах (2) и (3):

$$(2)\quad y_{k,t} = y_{k,0} + \left(y_{k,1}{}^{+} - y_{k,1}{}^{-}\right) + \cdots + \left(y_{k,t}{}^{+} - y_{k,t}{}^{-}\right) = y_{k,0} + \sum\nolimits_{u=1}^{t} \left(y_{k,u}{}^{+} - y_{k,u}{}^{-}\right),$$

$t = 1,2,\cdots,S-1$

$$(3)\quad y_{k,S} = y_{k,0} + \sum\nolimits_{u=1}^{S-1} \left(y_{k,u}{}^{+} - y_{k,u}{}^{-}\right)$$

Стоимость ценной бумаги k в разные временные промежутки t определяется в формуле (4):

$$(4)\quad p_{k,t} = p_{k,0}\left(1+\xi_{k,1}\right)\left(1+\xi_{k,2}\right)\cdots\left(1+\xi_{k,t}\right) = p_{k,0}\prod\nolimits_{u=1}^{t}\left(1+\xi_{k,u}\right), t = 1,2,\cdots,S.$$

В период t, $t = 0,1.\cdots,S-1$ стоимость вложений портфеля ценных бумаг состоит из валовой стоимости ценных бумаг и суммы транзакционных издержек. Нахождение стоимости вложений в портфель ценных бумаг в период $t = 0$, а также в любой другой период t, представлено в формулах (5) и (6) соответственно:

$$(5)\quad c_0 = \sum\nolimits_{k=1}^{n} y_{k,0}\lambda p_{k,0}(1+c^{+})$$

$$(6)\quad c_t = \sum\nolimits_{k=1}^{n}\left[y_{k,t}\lambda p_{k,t} + (c^{+}y_{k,t}{}^{+} + c^{-}y_{k,t}{}^{-})\lambda p_{k,t}\right], t = 1,2,\cdots,S-1$$

Если ценные бумаги продаются в момент времени время t, $t = 0,1.\cdots,S$, с чистого дохода необходимо вычесть транзакционные расходы на покупки в момент времени t-1 и транзакционные расходы на продажу в момент времени t, как представлено в формулах (7) и (8):

$$(7)\quad v_1 = \sum\nolimits_{k=1}^{n}\left[y_{k,0}\lambda p_{k,0}\xi_{k,1} - c^{+}y_{k,0}\lambda p_{k,0} - c^{-}y_{k,0}\lambda p_{k,1}\right]$$

$$(8)\quad v_t = \sum\nolimits_{k=1}^{n}\left[y_{k,t-1}\lambda p_{k,t-1}\xi_{k,t} - (c^{+}y_{k,t-1}{}^{+} + c^{-}y_{k,t-1}{}^{-})\lambda p_{k,t-1} - c^{-}y_{k,t-1}\lambda p_{k,t}\right], t = 1,2,\cdots,S$$

Также мы можем получить чистый доход от портфеля ценных бумаг во время S, формула (9):

$$(9)\quad v_2 = \sum\nolimits_{k=1}^{n}\left[y_{k,S-1}\lambda p_{k,S-1}\xi_{k,t} - (c^{+}y_{k,S-1}{}^{+} + c^{-}y_{k,S-1}{}^{-})\lambda p_{k,S-1} - c^{-}y_{k,S-1}\lambda p_{k,S}\right]$$

Теперь мы можем получить ставку дохода портфеля ценных бумаг для времени t, t=0,1.···,S. Ниже в формулах (10) и (11) представлено как можно получить эту ставку для первого периода и любого периода t, соответственно:

$$(10)\quad r_1 = \frac{v_1}{c_0} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\left[y_{k,0}\lambda p_{k,0}\xi_{k,1} - c^{+}y_{k,0}\lambda p_{k,0} - c^{-}y_{k,0}\lambda p_{k,1}\right]}{\sum_{k=1}^{n} y_{k,0}\lambda p_{k,0}(1+c^{+})}$$

$$(11)\quad r_t = \frac{v_t}{c_{t-1}} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\left[y_{k,t-1}\lambda p_{k,t-1}\xi_{k,t} - \left(c^{+}y_{k,t-1}{}^{+} + c^{-}y_{k,t-1}{}^{-}\right)\lambda p_{k,t-1} - c^{-}y_{k,t-1}\lambda p_{k,t}\right]}{\sum_{k=1}^{n}\left[y_{k,t-1}\lambda p_{k,t-1} + \left(c^{+}y_{k,t-1}{}^{+} + c^{-}y_{k,t-1}{}^{-}\right)\lambda p_{k,t-1}\right]},$$

$t = 2,3,\cdots,S$

Таким образом, мы можем выделить две цели для максимизации портфеля смешанных инвестиций: портфель проектов, формула (12):

$$(12)\quad \max E(R_1)$$

портфель ценных бумаг, формула (13):

$$(13)\quad \max E(v_2)$$

Объединим описанные выше цели максимизации в одну, формула(14):

$$(14)\quad \max\ p_1E(R_1) + p_2E(v_2)$$

где p_1 и p_2 - веса отражающие предпочтения инвестора в части желаемого дохода той или иной составляющей инвестиционного портфеля.

Для контроля прибыльности выбираемых проектов введем условие, что вероятность ситуации, в которой NPV проекта меньше или равно нулю не должно превышать уровень α, как представлено в формуле (15):

$$(15)\quad \Pr\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=D_i}^{T_i}\frac{N_{i,t}\cdot x_i}{(1+r)^t}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{D_i-1}\frac{O_{i,t}\cdot x_i}{(1+r)^t}\le 0\right\}\le\alpha$$

Аналогично для ценной бумаги, рассматриваемой в качестве составляющей инвестиционного портфеля, введем уровень терпимости β, ниже которого не должна опускаться вероятность того, что доходность бумаги, с учетом транзакционных издержек, окажется ниже r - требуемой ставки доходности проекта, формула (16) и (17):

$$(16)\quad \Pr\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n}\left[y_{k,0}\lambda p_{k,0}\xi_{k,1}-c^{+}y_{k,0}\lambda p_{k,0}-c^{-}y_{k,0}\lambda p_{k,1}\right]}{\sum_{k=1}^{n}y_{k,0}\lambda p_{k,0}(1+c^{+})}\le r\right\}\le\beta_1$$

$$(17)\quad \Pr\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n}\left[y_{k,t-1}\lambda p_{k,t-1}\xi_{k,t}-\left(c^{+}{y_{k,t-1}}^{+}+c^{-}{y_{k,t-1}}^{-}\right)\lambda p_{k,t-1}-c^{-}y_{k,t-1}\lambda p_{k,t}\right]}{\sum_{k=1}^{n}\left[y_{k,t-1}\lambda p_{k,t-1}+\left(c^{+}{y_{k,t-1}}^{+}+c^{-}{y_{k,t-1}}^{-}\right)\lambda p_{k,t-1}\right]}\le r\right\}\le\beta_t,$$

$t = 2,3,\cdots,S$

Кроме того, введем бюджетные ограничения, так начальные инвестиции в проекты и ценные бумаги не должны превышать начального капитала инвестора W_0, представлено в формуле (18):

$$(18)\quad \sum_{i=1}^{m}O_{i,t}\cdot x_i+\sum_{j=1}^{l}Q_j+\sum_{k=1}^{n}y_{k,0}\lambda p_{k,0}(1+c^{+})\le W_0$$

Так как в течение работы с инвестиционном портфелем, в периоды с $t = 0$ по $S - 1$ планируется корректировка состава портфеля ценных бумаг, необходимо контролировать риск перерасхода денежных средств. Для этой цели введем переменную отражающую допустимую вероятность нежелательного исхода на операциях корректировки - γ, формула (19):

$$(19)\quad \Pr\left\{\left(W_t+\sum_{k=1}^{n}(1-c^{-}){y_{k,t}}^{-}\lambda p_{k,0}\prod_{u=1}^{t}\left(1+\xi_{k,u}\right)+\sum_{i=1}^{m}N_{i,t}\cdot x_i+\sum_{j=1}^{l}B_{j,t}\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}(1+c^{+}){y_{k,t}}^{+}\lambda p_{k,0}\prod_{u=1}^{t}\left(1+\xi_{k,u}\right)+\sum_{i=1}^{m}O_{i,t}\cdot x_i+\sum_{j=1}^{l}Q_{j,t}\right)\le 0\right\}\le\gamma,\ t=1,2,\cdots,S-1$$

Таким образом, математическая модель портфеля смешанных инвестиций, включающая ценные бумаги, проекты, реализация которых обязательная и проекты по которым возможен выбор, представлена ниже, формула (20).

1.2 Описание метода решения

Для решения данной задачи использовался метод имитационного моделирования, включающий в себя несколько шагов. Первым шагом стала генерация нормальных случайных наборов описывающих доходность ценных бумаг. На втором шаге было получена ставка дохода для каждого периода r_t на основании полученных на первом шаге данных. В третьем шаге была получена вероятность $Pr\{r_t \le r\}$. И четвертым шагом - получение результата для предложенной модели через средство анализа Excel «Поиск решения».

Выводы

В данной работе была описана одна из проблем современной экономики - сильное протекционное влияние на рынок, в присутствии которого, классические подходы формирования инвестиционного портфеля могут не принести ожидаемого результата. Была предложена корректировка метода формирования оптимального портфеля смешанных инвестиций и представлена математическая модель, описывающая этот метод.

Полученные результаты должны помочь заинтересованным сторонам в процессе формирования и управления инвестиционным портфелем путем использования предложенной модели либо корректировки любого другого подходящего метода по аналогии, предложенной автором.

$$
(20)\quad \left\{
\begin{array}{c}
max\, p_1 E\left[\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=D_i}^{T_i}\frac{N_{i,t}\cdot x_i}{(1+r)^t}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{D_i-1}\frac{O_{i,t}\cdot x_i}{(1+r)^t}\right)+\left(\sum_{j=1}^{l}\sum_{t=D_j}^{T_i}\frac{B_{j,t}}{(1+r)^t}-\sum_{j=1}^{l}\sum_{t=0}^{D_j-1}\frac{Q_{j,t}}{(1+r)^t}\right)\right] \\
+p_2 E\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[y_{k,S-1}\lambda p_{k,S-1}\xi_{k,t}-\left(c^+ y_{k,S-1}{}^+ + c^- y_{k,S-1}{}^-\right)\lambda p_{k,S-1}-c^- y_{k,S-1}\lambda p_{k,S}\right]\right\} \\
\text{при условии:} \\
\sum_{i=1}^{m} O_{i,t}\cdot x_i+\sum_{j=1}^{l} Q_j+\sum_{k=1}^{n} y_{k,0}\lambda p_{k,0}(1+c^+)\le W_0 \\
Pr\left\{\left(W_t+\sum_{k=1}^{n}(1-c^-)y_{k,t}{}^-\lambda p_{k,0}\prod_{u=1}^{t}\left(1+\xi_{k,u}\right)+\sum_{i=1}^{m}N_{i,t}\cdot x_i+\sum_{j=1}^{l}B_{j,t}\right)\right. \\
\left.-\left(\sum_{k=1}^{n}(1+c^+)y_{k,t}{}^+\lambda p_{k,0}\prod_{u=1}^{t}\left(1+\xi_{k,u}\right)+\sum_{i=1}^{m}O_{i,t}\cdot x_i+\sum_{j=1}^{l}Q_{j,t}\right)\le 0\right\}\le\gamma, \\
t=1,2,\cdots,S-1. \\
Pr\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=D_i}^{T_i}\frac{N_{i,t}\cdot x_i}{(1+r)^t}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=0}^{D_i-1}\frac{O_{i,t}\cdot x_i}{(1+r)^t}\le 0\right\}\le\alpha \\
Pr\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n}\left[y_{k,0}\lambda p_{k,0}\xi_{k,1}-c^+ y_{k,0}\lambda p_{k,0}-c^- y_{k,0}\lambda p_{k,1}\right]}{\sum_{k=1}^{n} y_{k,0}\lambda p_{k,0}(1+c^+)}\le r\right\}\le\beta_1 \\
Pr\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n}\left[y_{k,t-1}\lambda p_{k,t-1}\xi_{k,t}-\left(c^+ y_{k,t-1}{}^+ + c^- y_{k,t-1}{}^-\right)\lambda p_{k,t-1}-c^- y_{k,t-1}\lambda p_{k,t}\right]}{\sum_{k=1}^{n}\left[y_{k,t-1}\lambda p_{k,t-1}+\left(c^+ y_{k,t-1}{}^+ + c^- y_{k,t-1}{}^-\right)\lambda p_{k,t-1}\right]}\le r\right\}\le\beta_t, \\
t=2,3,\cdots,S. \\
p_{k,t}=p_{k,0}\prod_{u=1}^{t}\left(1+\xi_{k,u}\right) \\
y_{k,t}=y_{k,0}+\sum_{u=1}^{t}\left(y_{k,u}{}^+ - y_{k,u}{}^-\right) \\
x_i\in(0,1)),i=1,\cdots,m \\
y_{k,0},y_{k,t}{}^+,y_{k,t}{}^-\ge 0, y_{k,0},y_{k,t}{}^+,y_{k,t}{}^-\in Z,\left|y_{k,t}{}^+ - y_{k,t}{}^-\right|=y_{k,t}{}^+ + y_{k,t}{}^-, \\
k=1,\cdots,n,t=2,3,\cdots,S-1
\end{array}\right.
$$

Литература

1. *Y Fang, KK Lai, S Wang* - Fuzzy Portfolio Optimization: Theory and Methods, 2008 - Springer
2. *H. Markowitz*, Portfolio Selection, Journal of Finance, V.7., I.1., P. 77-91, (1952)
3. *Robichek, A. A., Myers S. C.*. 1966. Conceptual Problems in the Use of Risk–Adjusted Discount Rates. // Journal of Finance, American Finance Association, vol. 21(4), P.727-730.
4. Hillier, F. S. 1963. The Deviation of Probabilistic Information for the Evaluation of Risky Investments. // Management Science. P.443-457.
5. *Smith, J. E., Nau R. F.*. 1995. Valuing Risky Projects: Option Pricing Theory and Decision Analysis. // Management Science. Vol. 41, №5, May 1995. P.795-816.
6. *Gustafsson, J., Salo A.* Contingent Portfolio Programming for the Management of Risky Projects. // Operations Research, published online: December 1, 2005.
7. R*isk Assessment In Multi-period Models, A Syrovatkin* - 2018 Eleventh International Conference "Management of large-scale system development" (MLSD) - ieeexplore.ieee.org
8. *Севастьянов П.В.* Невероятностная концепция риска в оптимизации портфеля / П.В. Севастьянов, Л.Г. Дымова [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.ifel.ru/br1/12.pdf
9. *Yong Fang, K.K. Lai and Shou-Yang Wang, A Fuzzy* Mixed Projects and Securities Portfolio Selection Model, Fuzzy Systems and Knowledge Discovery: Second International Conference, FSKD 2005, Changsha, China, August 27-29, 2005, Proceedings, Part II (pp.931-940)
10. *Huang, X., & You, Y.* (2017). Optimal Mixed Project and Security Portfolio Selection under Reinvestment Strategy. 2017 International Conference on Industrial Engineering, Management Science and Application (ICIMSA).