О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЙ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ЗАМКНУТЫХ МНОГООБРАЗИЯХ[41]

Туницкий Д.В.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65
dtunitsky@yahoo.com

Аннотация: Работа посвящена вопросам разрешимости одного класса полулинейных эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка на замкнутых многообразиях, широко используемых при математическом моделировании разнообразных процессов реакции – диффузии.

Ключевые слова: полулинейные эллиптические уравнения, замкнутые многообразия. слабые решения.

Введение

Эволюционные уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f(x,u), \tag{1}$$

где

$$Lu = -\sum_{l,i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^l}\left(a^{l,i}(x)\frac{\partial u}{\partial x^i}\right) \tag{2}$$

– эллиптический линейный дифференциальный оператор второго порядка, широко используются при математическом моделировании разнообразных процессов реакции – диффузии. В частности, для описания концентрации и распространения веществ, а также возрастания и продвижения биологических популяций и генных признаков. Эта тематика представляет значительный интерес и ей посвящено значительное количество работ, среди которых, прежде всего, следует назвать знаменитые статьи А.Н. Колмогорова, Г.И. Петровского и Н.С. Пискунова [1] и Р.А. Фишера [2].

В случае стационарной модели решение $u = u(t,x)$ уравнения (1)–(2) не зависит от времени, $u = u(x)$, и поэтому необходимо удовлетворяет стационарному полулинейному уравнению

$$Lu = f(x,u). \tag{3}$$

Исследованию существования решений для аналогов этого уравнения на произвольных замкнутых многообразиях M конечной размерности n посвящена данная работа.

Следует отметить, что в ряде важных с прикладной точки зрения задач допустимо внесение определенных изменений в правые части уравнений (1) – (3). Иными словами, эти правые части выполняют роль управляющих функций, которые могут быть не только не гладкими, но даже и не непрерывными. Поэтому желателен выбор такого класса допустимых решений, который позволял бы построить удовлетворительную теорию разрешимости рассматриваемых уравнений при минимальных требованиях на регулярность их коэффициентов. В качестве такого класса в данной работе выступают слабые решения. В этом классе удается установить разрешимость аналогов уравнения (1) на замкнутых многообразиях при требовании от их коэффициентов всего лишь измеримости, ограниченности и липшицевости относительно неизвестной функции.

1 Пространства тензорных полей

Пусть M – n-мерное гладкое замкнутое риманово многообразие, т.е. связное компактное многообразие без края с метрикой

$$g: TM \times TM \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Метрики, индуцированные на тензорных расслоениях

[41] *Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-01-00610 а) и Российского научного фонда (проект 19-11-00223).*

$$(TM)^{\otimes^i} \otimes (T^*M)^{\otimes^l}, \qquad i, l = 0,1,2, \dots,$$

этого многообразия посредством g, будем обозначать той же буквой. Под $(TM)^{\otimes^0} \otimes (T^*M)^{\otimes^0}$ понимается тривиальное расслоение $M \times \mathbb{R}$,

$$(TM)^{\otimes^0} \otimes (T^*M)^{\otimes^0} = M \times \mathbb{R},$$

и

$$g(r, t) = rt, \qquad r, t \in \mathbb{R}.$$

Метрика g индуцирует на M меру $V = V_g$, в локальных координатах $x^1, \dots, x^n$

$$dV = \sqrt{g} dx^1 \dots dx^n, \tag{1.1}$$

где

$$g = \det\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right)\right),$$

и связность Леви – Чевита со взаимно-однозначно определяемым ею оператором ковариантного дифференцирования $\nabla = \nabla_g$.

С помощью метрики g и меры V (1.1) для $i, l = 0,1,2, \dots$ определяются нормы тензорных полей

$$\|s\|_{L^p\left((TM)^{\otimes^i} \otimes (T^*M)^{\otimes^l}\right)} = \langle g^{\frac{p}{2}}(s, s), 1\rangle^{\frac{1}{p}}, \ \ p \geq 0,$$

$$\|s\|_{L^\infty\left((TM)^{\otimes^i} \otimes (T^*M)^{\otimes^l}\right)} = \operatorname*{ess\,sup}_{m \in M} \left|\sqrt{g(s, s)}(m)\right|,$$

где для функций u и v

$$\langle u, v\rangle = \int\limits_M u(m) v(m) dV, \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{m \in M} |u(m)| = \inf_{\substack{S \subseteq M, \\ V(S) = 0}} \sup_{m \in M \setminus S} |u(m)|, \tag{1.2}$$

и банаховы пространства

$$L^p\left((TM)^{\otimes^i} \otimes (T^*M)^{\otimes^l}\right) =$$

$$\left\{s: M \ni m \mapsto s(m) \in (T_m M)^{\otimes^i} \otimes (T_m^* M)^{\otimes^l} \,\middle|\, \|s\|_{L^p\left((TM)^{\otimes^i} \otimes (T^*M)^{\otimes^l}\right)} < +\infty\right\}.$$

Пространства

$$L^2\left((TM)^{\otimes^i} \otimes (T^*M)^{\otimes^l}\right)$$

являются гильбертовыми со скалярными произведениями

$$\langle s_1, s_2\rangle_{L^2\left((TM)^{\otimes^i} \otimes (T^*M)^{\otimes^l}\right)} = \langle g(s_1, s_2), 1\rangle.$$

Положим

$$L^p(M) = L^p\left((TM)^{\otimes^0} \otimes (T^*M)^{\otimes^0}\right),$$

так что

$$\langle u, v\rangle_{L^2(M)} = \langle u, v\rangle.$$

Кратное ковариантное дифференцирование

$$\nabla^j: C^\infty\left((TM)^{\otimes^i} \otimes (T^*M)^{\otimes^l}\right) \ni s \mapsto \nabla^j s \in C^\infty\left((TM)^{\otimes^i} \otimes (T^*M)^{\otimes^{l+j}}\right)$$

позволяет для $i, l = 0,1,2, \dots$ определить нормы

$$\|u\|_{W^{k,p}\left((TM)^{\otimes i}\otimes(T^*M)^{\otimes l}\right)} = \left(\sum_{j=0}^{k}\left\|\nabla^j s\right\|^p_{L^p\left((TM)^{\otimes i}\otimes(T^*M)^{\otimes l+j}\right)}\right)^{\frac{1}{p}},\ \ p \geq 1,$$
$$\|u\|_{W^{k,\infty}\left((TM)^{\otimes i}\otimes(T^*M)^{\otimes l}\right)} = \sum_{j=0}^{k}\left\|\nabla^j s\right\|_{L^\infty\left((TM)^{\otimes i}\otimes(T^*M)^{\otimes l+j}\right)},\ \ k = 0,1,2,\dots, \tag{1.3}$$

и *пространства Соболева*

$$W^{k,p}\left((TM)^{\otimes i}\otimes(T^*M)^{\otimes l}\right) =$$
$$\left\{s\colon M \ni m \longmapsto s(m) \in (T_mM)^{\otimes i}\otimes(T^*_mM)^{\otimes l}\ \middle|\ \|u\|_{W^{k,p}} < +\infty\right\}.$$

Эти пространства являются пополнением пространства бесконечно дифференцируемых тензорных полей

$$C^\infty\left((TM)^{\otimes i}\otimes(T^*M)^{\otimes l}\right)$$

относительно норм (1.2), см., например, [3; разд. 10.2.4] и [4; § 7.6]. Пространства

$$W^{k,2}\left((TM)^{\otimes i}\otimes(T^*M)^{\otimes l}\right)$$

являются гильбертовыми со скалярными произведениями

$$\langle s_1, s_2\rangle_{W^{k,2}\left((TM)^{\otimes i}\otimes(T^*M)^{\otimes l}\right)} = \sum_{j=0}^{k}\langle\nabla^j s_1, \nabla^j s_2\rangle_{L^2\left((TM)^{\otimes i}\otimes(T^*M)^{\otimes l+j}\right)}.$$

Очевидно, что

$$W^{0,p}\left((TM)^{\otimes i}\otimes(T^*M)^{\otimes l}\right) = L^p\left((TM)^{\otimes i}\otimes(T^*M)^{\otimes l}\right).$$

Положим

$$W^{k,p}(M) = W^{k,p}\left((TM)^{\otimes 0}\otimes(T^*M)^{\otimes 0}\right).$$

2 Формулировка основного результата

Предположим, что наряду с g на римановом многообразии M задана еще одна метрика a. Пусть она измерима и существуют такие положительные числа a_0 и a_1, что

$$a_0 g(\eta,\eta) \leq a(\eta,\eta) \leq a_1 g(\eta,\eta) \tag{2.1}$$

при всех $\eta \in T^*M$. Рассмотрим операторы d^*_a и d^*_g, формально сопряженные с оператором внешнего дифференцирования d относительно метрик a и g соответственно, см. [5; гл. VIII, § 1]. В частности,

$$\langle a(du, v), 1\rangle = \langle a(u, d^*_a v), 1\rangle,$$

для всех дифференциальных k-форм u и $(k+1)$-форм v, где $k = 0,1,\dots,n-1$, и если многообразие M ориентируемо, то

$$d^*_a = * \, d \, *,$$

где $* = *_a$ – оператор Ходжа, индуцированный метрикой a. Определим на функциях $u \in C^\infty(M)$ линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$Lu = \Delta u, \tag{2.2}$$

где

$$\Delta = \Delta_a = d^*_a \circ d$$

– *геометрический лапласиан* (*оператор Лапласа – де Рама*, см. [6; гл. IV, § 5]). В локальных координатах $x^1, \dots, x^n$

$$Lu = -\frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{l,i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\sqrt{a} a\left(dx^l, dx^i\right) \frac{\partial u}{\partial x^i} \right),$$

где

$$a = \det\left(a\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \right);$$

ср. с (2). В этом контексте условие (2.1) означает, что оператор (2.2) *равномерно эллиптичен* на многообразии M.

Рассмотрим измеримую функцию

$$f: M \times \mathbb{R} \ni (m, u) \mapsto f(m, u) \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

которая локально липшицева по переменной u, т.е. для любого компактного подмножества $K \subset M \times \mathbb{R}$ найдется такая положительная постоянная $N(K)$, что

$$|f(m, u_1) \mapsto f(m, u_2)| \leq N(K)|u_1 - u_2| \tag{2.4}$$

для $(m, u_1), (m, u_2) \in K$. *Слабым* или *обобщенным решением* уравнения

$$Lu = f, \tag{2.5}$$

называется такая функция $u \in W^{1,2}(M)$, что

$$\mathcal{L}(u, v) = \langle f(\,\cdot\,, u), v \rangle \tag{2.6}$$

для всякой функции $v \in C^\infty(M)$, где

$$\mathcal{L}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = \langle \mathrm{a}(\mathrm{du}, \mathrm{dv}), 1 \rangle. \tag{2.7}$$

Функция $u \in W^{1,2}(M)$ называется *слабым* или *обобщенным субрешением (суперрешением)* уравнения (2.5), если она удовлетворяет неравенству

$$Lu \leq f \ \ (Lu \geq f)$$

в слабом смысле, т.е. для любой неотрицательной функции $v \in C^\infty(M)$

$$\mathcal{L}(u, v) \leq \langle f(\,\cdot\,, u), v \rangle \ \ (\mathcal{L}(u, v) \geq \langle f(\,\cdot\,, u), v \rangle). \tag{2.8}$$

Далее для краткости будем использовать сокращение *п.в.*, когда речь идет о выполнении каких-либо свойств почти всюду по мере V (1.1). Например, $C^\infty(M)$ плотно в $W^{1,2}(M)$, поэтому из выполнения соотношений (2.7) и (2.8) для неотрицательных функций $v \in C^\infty(M)$ вытекает их выполнение для п.в. неотрицательных функций $v \in W^{1,2}(M)$.

Имеет место

ТЕОРЕМА (существование решения). Пусть метрика

$$a \in L^\infty\left((T^*M)^{\otimes^2}\right)$$

удовлетворяет оценке (2.1), а функция

$$f \in L^\infty_{loc}(M \times \mathbb{R})$$

п.в. удовлетворяет условию Липшица (2.4). Если найдутся функции

$$w_0, w_1 \in L^\infty(M),$$

являющиеся слабыми субрешением и суперрешением уравнения (2.5) соответственно, которые п.в. удовлетворяют неравенству $w_0 \leq w_1$, то существуют слабые решения u_0 и u_1 уравнения (2.5), для которых п.в. выполняется оценка

$$w_0 \le u_0 \le u_1 \le w_1. \qquad (2.9)$$

Решение u_0 является минимальным, а решение u_1 – максимальным в том смысле, что для любого слабого решения u уравнения (2.5), п.в. удовлетворяющего неравенству

$$w_1 \le u \le w_1, \qquad (2.10)$$

п.в. выполняется оценка

$$u_0 \le u \le u_1. \qquad (2.11)$$

Доказательство см. в разделе 3.

3 Доказательство

Для доказательства теоремы воспользуемся следующим вспомогательным результатом.

ЛЕММА. *Пусть выполнены все условия, наложенные в теореме на дифференциальный оператор L (2.2). Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) Найдется такое положительное число μ_1, что

$$\mathcal{L}(u,u) \ge \frac{a_0}{2}\langle du, du\rangle_{L^2(T^*M)} - \mu\langle u,u\rangle$$

для

$$\mu \ge \mu_1, \qquad u \in W^{1,2}(M).$$

(b) Найдутся такие положительные числа

$$\mu_2 > 0, \qquad C = C(\mu_2) > 0,$$

что справедлива априорная оценка

$$\langle u,u\rangle_{W^{1,2}(M)} \le C(\mathcal{L}(u,u) + \mu\langle u,u\rangle)$$

для

$$\mu \ge \mu_2, \qquad u \in W^{1,2}(M).$$

(c) Найдется такое положительное число μ_3, что если при $\mu \ge \mu_3$ функции $u_0, u_1 \in W^{1,2}(M)$ удовлетворяют неравенству

$$\mathcal{L}(u_0,v) + \mu\langle u_0,v\rangle \le \mathcal{L}(u_1,v) + \mu\langle u_1,v\rangle$$

для любой неотрицательной функции $v \in C^\infty(M)$, то $u_0 \le u_1$ п.в.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (a) устанавливается посредством оценки левой части доказываемого неравенства с использованием условия равномерной эллиптичности (2.1), см., например, [4; § 8.2]. Утверждение (b) – очевидное следствие (a). Утверждение (c) вытекает из сильного принципа максимума для слабых субрешений, см., например, [4; § 8.7].

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Поскольку функция f (2.3) п.в. удовлетворяет условию Липшица (2.4), то, положив

$$\mathcal{L}(u_0,v) + \mu\langle u_0,v\rangle \le \mathcal{L}(u_1,v) + \mu\langle u_1,v\rangle$$

для всякого положительного r, заключаем, что для любых чисел

$$\mu \ge \mu_0\big(\max\{\|w_0\|_{L^\infty(M)}, \|w_1\|_{L^\infty(M)}\}\big)$$

и функций v_0 и v_1, п.в. удовлетворяющих оценке

$$w_0 \le v_0 \le v_1 \le w_1,$$

п.в. выполняется неравенство

$$f(\,\cdot\,, v_0) + \mu v_0 \le f(\,\cdot\,, v_1) + \mu v_1, \tag{3.1}$$

ср. с [7; прилож. к гл. IV, разд. 2]. Положим

$$c_0 = \max\{\mu_0(\max\{\|w_0\|_{L^\infty(M)}, \|w_1\|_{L^\infty(M)}\}), \mu_1, \mu_2, \mu_3\}, \tag{3.2}$$

где μ_1, μ_2 и μ_3 – положительные числа из утверждений (a), (b) и (c) леммы. Очевидно, что уравнение (2.5) эквивалентно уравнению

$$Lu + c_0 u = f(\,\cdot\,, u) + c_0 u. \tag{3.3}$$

Построим по индукции две последовательности приближений

$$\{u_{0,l}\}, \qquad \{u_{1,l}\}, \qquad l = 0,1,2, \dots .$$

Пусть $u_{j,0} = w_j$ при $j = 0,1$, а $u_{j,l}$ является слабым решением уравнения

$$Lu_{j,l} + c_0 u_{j,l} = f(\,\cdot\,, u_{j,l-1}) + c_0 u_{j,l-1}, \qquad l = 1,2, \dots ,$$

т.е. для всякой функции $v \in C^\infty(M)$

$$\mathcal{L}(u_{j,l}, v) + c_0\langle u_{j,l}, v\rangle = \langle f(\,\cdot\,, u_{j,l-1}) + c_0 u_{j,l-1}, v\rangle. \tag{3.4}$$

В силу свойства (a) леммы ограниченная квадратичная форма

$$\mathcal{L}(u,u) + c_0\langle u, u\rangle$$

коэрцитивна в гильбертовом пространстве $W^{1,2}(M)$, и поэтому по теореме Лакса – Мильграма уравнение (3.4) однозначно слабо разрешимо в этом пространстве, см., например, [4; § 5.8]. Для всякого слабого решения u, удовлетворяющего оценке (2.10), согласно неравенству (3.1) и утверждению (c) леммы п.в. выполняются соотношения

$$w_0 = u_{0,0} \le u_{0,1} \le u_{0,2} \le \dots \le u \le \dots \le u_{1,2} \le u_{1,1} \le u_{1,0} = w_1.$$

В силу монотонности и ограниченности последовательностей п.в. существуют их пределы

$$u_0 = \lim_{l\to+\infty} u_{0,l}, \qquad u_1 = \lim_{l\to+\infty} u_{1,l}, \tag{3.5}$$

для которых п.в.

$$w_0 = u_{0,0} \le u_{0,1} \le u_{0,2} \le \dots \le u_0 \le u \le u_1 \le \dots \le u_{1,2} \le u_{1,1} \le u_{1,0} = w_1. \tag{3.6}$$

Поэтому по теореме Лебега о мажорированной сходимости равенства (3.5) имеют место и в норме $\|\cdot\|_{W^{0,2}(M)}$. Далее, согласно выбору (3.2) и утверждению (b) леммы найдется такая постоянная C, что для $j = 0,1$

$$\langle u_{j,l+i} - u_{j,l}, u_{j,l+i} - u_{j,l}\rangle_{1,2} \le C\big(\mathcal{L}(u_{j,l+i} - u_{j,l}, u_{j,l+i} - u_{j,l}) + c_0\langle u_{j,l+i} - u_{j,l}, u_{j,l+i} - u_{j,l}\rangle\big),$$
$$l, i = 1,2, \dots .$$

Поскольку по определению (2.7)

$$\mathcal{L}(u_{j,l+i} - u_{j,l}, u_{j,l+i} - u_{j,l}) + c_0\langle u_{j,l+i} - u_{j,l}, u_{j,l+i} - u_{j,l}\rangle = \mathcal{L}(u_{j,l+i}, u_{j,l+i} - u_{j,l}) +$$
$$c_0\langle u_{j,l+i}, u_{j,l+i} - u_{j,l}\rangle - \mathcal{L}(u_{j,m}, u_{j,l+i} - u_{j,l}) - c_0\langle u_{j,l}, u_{j,l+i} - u_{j,l}\rangle, \qquad l, i = 1,2, \dots ,$$

то по построению (3.4) имеем

$$\langle u_{j,l+i} - u_{j,l}, u_{j,l+i} - u_{j,l}\rangle_{1,2} \le C\langle f(\,\cdot\,, u_{j,l+i-1}) + c_0 u_{j,l+i-1}, u_{j,l+i} - u_{j,l}\rangle -$$
$$C\langle f(\,\cdot\,, u_{j,l-1}) + c_0 u_{j,l-1}, u_{j,l+i} - u_{j,l}\rangle, \qquad l, i = 1,2, \dots .$$

Следовательно, по теореме Лебега о мажорированной сходимости построенные последовательности приближений $\{u_{0,l}\}$ и $\{u_{1,l}\}$ фундаментальны в норме $\|\cdot\|_{W^{1,2}(M)}$ и сходятся к функциям u_0 и u_1 (3.5), так что, переходя к пределу в (3.4) получаем

$$\mathcal{L}(u_j, v) + c_0\langle u_j, v\rangle = \langle f(\,\cdot\,, u_j), v\rangle + c_0\langle u_j, v\rangle, \qquad j = 0,1,$$

т.е. функции u_0 и u_1 являются слабыми решениями уравнения (3.3). Выполнение для u неравенств (2.9) и (2.11) вытекает из оценки (3.6).

Теорема доказана.

Заключение

Значительный интерес представляют уравнения (3) с оператором L (2), имеющим периодические коэффициенты. Этот случай сводится к уравнению на многообразии, диффеоморфному n-мерному тору $\mathbb{T}^n$, и имеет большое прикладное значение. Значительный интерес представляют и аналоги уравнения (3) на замкнутых многообразиях, диффеоморфных n-мерной сфере $\mathbb{S}^n$.

В связи с вышесказанным заметим, что согласно обобщенной гипотезе Пуанкаре сфере $\mathbb{S}^n$ гомеоморфны все гомотопически эквивалентные ей замкнутые многообразия. Наибольшие затруднения при установлении истинности этой гипотезы связаны с размерностью $n = 3$. В этом случае доказательство, предложенное Г.Я. Перельманом, см. [8] и [9], основано на исследовании потоков Риччи на замкнутых трехмерных многообразиях. А эти потоки, по сути, представляют собой решения соответствующих нелинейных систем дифференциальных уравнений с частными производными.

Таким образом, изучение решений нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными на замкнутых многообразиях весьма важно и актуально как с прикладной, так и с общематематической точек зрения.

Литература

1. *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюллетень МГУ. Сер. А. Математика и Механика // Т. 1. 1937, № 6. – С. 1–26.
2. *Fisher R.A.* The advance of advantageous genes. // Ann. Eugenics. Vol. 7. 1937. – P. 335–369.
3. *Nicolaescu L.I. Lectures on the Geometry of Manifolds*. – New Jersey: World Scientific, 2021. –
4. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
5. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи – Зингера об индексе. – М.: Мир, 1970. – 360 с.
6. *Уэллс Р.* Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. – М.: Мир, 1976. – 288 с.
7. *Курант Р. Уравнения с частными производными.* – М.: Мир, 1964. – 832 с.
8. *Perelman Grisha.* Ricci flow with surgery on three-manifolds // arXiv:math.DG/0303109. March 10, 2003.
9. *Perelman Grisha.* Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds // arXiv:math.DG/0307245. July 17, 2003.