РЕКОНСТРУКЦИЯ ВАРИАНТОВ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОЙ ЛОГИКИ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ СТРУКТУР В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ СЛОЖНЫМИ СИСТЕМАМИ

Титов А.В.

Российский университет транспорта (МИИТ),Россия, г. Москва, ул. Образцова, 9

a.v.titov@mail.ru

Аннотация. Исследуется проблема разработки общей базы математического обеспечения задаче моделирования систем управления объектами большой сложности. Рассматривается задача реконструкции вариантов пропозициональной логики на основе структур, элементы которых рассматриваются как значения истинности формул реконструируемых вариантов пропозициональной логики. В основе реконструкции лежит предположение о наличии гомоморфизма из алгебры логики в алгебру значений истинности.

Ключевые слова: пропозициональная логика, гомоморфизм, математические структуры, решетки, булевы решетки, импликативные решетки, псевдобулева алгебра, алгебра Брауэра, паранепротиворечивые логики.

Введение

О природе логического Гегель замечает: «*Логическое* по своей форме имеет три стороны: а) абстрактную, или рассудочную, б) диалектическую, или отрицательно-разумную, в) спекулятивную, или положительно-разумную» [1].

Абстрактная, рассудочная сторона логического лежит в основе формальной логики с законами противоречия и исключенного третьего.

Логика диалектическая не принимает эти законы, поскольку: «Эти три стороны не составляют трех частей логики, а суть моменты всякого логически реального, т.е. всякого понятия или всего истинного вообще. Все они могут быть положены в первом моменте, в моменте рассудочности, *и благодаря этому могут быть удерживаемы в своей обособленности, но в этом виде они рассматриваются не в их истине.*» [1, стр.202]. Вследствие этого «Эта метафизика сделалась догматизмом, так как она, согласно природе конечных определений, должна была принимать, что из двух противоположных убеждений, каковыми были вышеуказанные положения, одно должно быть истинным, другое ложным» [1, с.139].

Т.е. с точки зрения диалектики законы классической формальной логики не отражают действительности в ее истине, в частности, А.Ф. Лосев замечает: «Что диалектика не есть формальная логика, это известно всем». И далее «Если диалектика, действительно, не есть формальная логика, тогда она *обязана* быть вне законов тождества и противоречия, т.е. она обязана быть *логикой противоречия*».[2].

«Диалектическая феноменология» по мнению А.Ф.Лосева обязана дать не только описание раздельно данных моментов смысла «..., но объяснить смысл во всех смысловых же связях, во всей его смысловой, структурной взаимосвязи и самопорождаемости. *Надо одну категорию объяснить другой категорией*, так, что бы видно было, как одна категория порождает другую и все вместе - друг друга - эйдетически, категориально, оставаясь в сфере смысла же» [2].

Однако и в формальной логике, фактически на протяжения всего периода ее развития законы исключенного третьего и противоречия, принятые в традиционной логике являются объектами постоянного критического исследования. Результатом такого исследования стало появление вариантов формальной логики свободной от этих законов. К таким вариантам пропозициональной логики можно отнести, в частности интуиционистскую логику, в которой отсутствует закон исключенного третьего, некоторые варианты многозначной логики, различные варианты паранепротиворечивой логики.

Варианты логики свободные от законов противоречия и исключенного третьего разрабатывал в начале XX века казанский логик Н.А. Васильев. Из его работ следует, что классификация вариантов пропозициональной логики у его предшественников основывалась на делении суждений, развитием которого занимался Н.А. Васильева, поскольку традиционное «становится тесным» [3].

Н.А.Васильев рассматривал миры, в которых возможны лишь три сорта суждений: утвердительное- «А есть В», отрицательное- «А не есть В», индифферентное- «А есть и не есть В».

Идея привлечения языка математики в философию и логику возникла достаточно давно, в частности, замысел универсального логического исчисления, которым могли бы пользоваться философы, возникла у Лейбница. Языком современной науки является язык математики, позволяющий в новом свете взглянуть на многие научные концепции, в частности, относящиеся к развитию философии и логики. В этой связи не будет лишним привести слова выдающегося российского логика В.А. Смирнова: «Не редко бывает так, что мы начинаем лучше понимать старые концепции в свете самых современных достижений науки. Более того, применение современных методов к реконструкции исторически имевшей место концепции, нередко приводит к созданию новых теорий и направлений» [4, с.448].

1 Классическая пропозициональная логика и булева алгебра

Привлечение языка математических структур к исследованиям в области построения логических структур позволяет, по мнению автора, выработать общий подход к классификации вариантов пропозициональной логики [6].

На сегодняшний день «Несмотря на огромный имеющийся накопленный фактический и теоретический материал, в целом вопрос о реконструкции синтаксических формулировок на основе логической семантики все еще остается открытым» [5, с.107].

В исследованиях последних лет в этой области ставится вопрос об алгебре логики как об алгебре подобной алгебраической семантике алгебраизуемых логик, однако метод реконструкции логик не обсуждается [7].

В настоящей работе развивается подход, предложенный в [6] как возможный вариант классификации и реконструкции логических систем на основе классификации алгебраических структур, рассматриваемых как структуры логической семантики.

Вопрос о математических структурах как о структурах значений истинности пропозициональных формул вполне правомерен. В большинстве известных вариантов пропозициональной логики в качестве таких структур берутся числовые двухзначные или многозначные структуры, что в интуиционистской логике, в качестве значений истинности высказываний рассматриваются совокупности открытых множеств *некоторого* топологического пространства, т.е. структура значений истинности в данном случае носит общий, не обязательно числовой характер. *В данном случае важно лишь, что $A\cup\neg A\neq X$, однако нелишне заметить, что мера этого объединения равна единице, т.к. мера граничного множества есть нуль.*

В классической логике, как известно, рассматривается четыре типа суждений: «все А есть В», «ни одно А не есть В», «некоторые А суть В», «некоторые А не суть В». Такая формулировка легко приводит к теоретико-множественной интерпретации суждений, при которой каждому предикату соответствует объем понятия, т.е. класс объектов с определенным свойством. Как известно, семейство подмножеств некоторого множества с операциями объединения пересечения и дополнения образует булеву решетку, вследствие чего индуцированное такой интерпретацией видов суждений классическое исчисление высказываний является булевой алгеброй или булевой решеткой.

Такая «эквивалентность» между высказываниями и множествами привела к тому, что как алгебра высказываний, так и алгебра значений истинности в классическом исчислении высказываний являются подобными гомоморфными алгебрами.

Если добавить к этому метафизический принцип о ложности или истинности каждого высказывания, то получим в качестве структуры, на которой «измеряются» значения истинности пропозициональных формул классическую двух элементную булеву решетку $B=\{0,1\}$.

Развитие многозначных логик шло по пути «модернизации» множества $\{1;0\}$, В частности, в качестве значений истинности стали брать значения из отрезка $[0,1]$. Однако синтаксическая структура, алгебра высказываний, оставалась булевой алгеброй.

В силу сказанного выше о связи высказываний классической логики с множествами, в основе классического исчисления высказываний лежит положение о том, что истинностное значение высказывания $F(A_1,A_2,\ldots,A_n)$, где F операция над высказываниями $A_1,A_2,\ldots,A_n$, полностью определяется истинностными значениями $A_1,A_2,\ldots,A_n$. Т.е. $\varphi(F(A_1,A_2,\ldots,A_n))= F(\varphi A_1,\varphi A_2,\ldots,\varphi A_n)$ [8].

Таким образом, в традиционном исчислении высказываний отображение φ множества формул в семейство истинностных значений $\varphi:Fm \to B$, есть гомоморфизм со значением в двухэлементной булевой алгебре. В силу этого каждой формуле соответствует булева функция $F: B^n\to B$. Сохранение этого принципа при переходе к многозначным логикам требует, чтобы алгебра высказываний Fm была свободной алгеброй относительно своего класса подобия в данном случае таким классом подобия является класс булевых алгебр, назовем их В-алгебрами.

Таким образом, приходим к Положению 1: классическое исчисление высказываний есть В-свободная алгебра.

Для доказательства этого положения достаточно показать, что алгебра высказываний элементарно эквивалентна модели В булевой решетки относительно множества $\{0,1\}$. Этот факт хорошо известен. В качестве примера рассмотрим аксиому алгебры высказываний $A\wedge B\to B\equiv 1$. Для этого преобразуем левую часть приведенной формулы как композиции операций в булевой решетке:

$A\wedge B\to B=\neg(A\wedge B)\vee B=(\neg A\vee\neg B)\vee B=1$.

Обратно, легко показать, что каждая аксиома булевой решетки есть тавтология в алгебре высказываний.

Правило modus ponens так же легко интерпретируется на языке булевых решеток. Пусть A=1 и $A\to B=1$, но в импликативных решетках $A\to B=1$ тогда и только тогда, когда $A\le B$, таким образом, из A=1 и $A\to B=1$ следует B =1.

Нарушение приведенного принципа в пропозициональной логике приводит к нежелательным результатам. например, в известном варианте многозначной пропозициональной логики в качестве значений истинности вместо двухэлементной булевой алгебры {0,1} рассматриваются значения истинности из множества чисел $0\le x\le 1$, на котором не сохраняется структура булевой алгебры. В результате при $\varphi A=1/2$ имеем $\varphi(A\vee\neg A)=1/2$, что плохо согласуется с интуицией.

Приведенные рассуждения позволяют высказать предположение о возможности построения вариантов пропозициональной логики как алгебр гомоморфных семантическим структурам.

2 Обобщение принципа наличия гомоморфизма.

Как известно, в интуиционистской логике отсутствует закон исключенного третьего, вследствие чего в интуиционистском пропозициональном исчислении из числа аксиом исключается формула $A\vee\neg A$.

В интуиционистском пропозициональном исчислении тавтологиями не являются следующие формулы:

$A\vee\neg A$.

$\neg\neg A\to A$.

$(A\to B)\to(\neg A\vee B)$.

$(\neg(A\wedge B)\to(\neg A\vee\neg B))$.

$(\neg A\to B\to(\neg B\to A)$.

$(\neg A\to\neg B)\to (B\to A)$.

$(((A\to B)\to A)\to A)$.

Структурой, элементы которой играют роль значений истинности формул интуиционистской пропозициональной логики, является псевдобулева алгебра. Существует гомоморфизм φ, отображающий множества формул интуиционистского пропозиционального исчисления в псевдобулеву алгебру A. $\varphi:Fm\to A$. В силу этого, каждой формуле интуиционистского исчисления высказываний можно сопоставить функцию $F: A^n\to A$.

Импликативной решеткой называют алгебру <A, $\cap,\cup,\Rightarrow$>. В любой импликативной решетке [9]:

H1. $a\Rightarrow b=1\Leftrightarrow a\le b$, действительно:

1) $a\Rightarrow b=1\to a=a\cap 1\le b$.

2) $a\le b\Rightarrow a\cap c\le b$ $\forall c\in A\Rightarrow$ $a\Rightarrow b=1$.

H2. $a=b\Leftrightarrow a\Rightarrow b=1=b\Rightarrow a$

Из 1 $a\le b$ и $a\ge b\Rightarrow a=b$.

H3. $a\Rightarrow a=1$ поскольку

$\forall a\in A$ $a\le a$, то из 1. получаем нужное.

H4. $a\Rightarrow 1=1$.

Поскольку $a\cap c\le 1$ для любого $c\in A$, то $a\Rightarrow 1=1$.

H5. $1\Rightarrow b=b$

$\forall c\in A$ $1\cap c\le b\Rightarrow c\le b\Rightarrow$ $1\Rightarrow b=b$.

H6. $(a-a)\cap b=b$

Т.к.$1\cap b=b$

H7. а) $a\cap(a\Rightarrow b)\le b$

Из определения $a\Rightarrow b$.

H8. Если $a_1\le a_2$ то $a_2\Rightarrow b\le a_1\Rightarrow b$

Пусть $c_1 = a_1 \Rightarrow b$, $c_2 = a_2 \Rightarrow b$, тогда $a_1 \cap c_2 \le a_2 \cap c_2 \le b \Rightarrow c_2 \le c_1$

H9. Если $b_1 \le b_2$ то $a \Rightarrow b_1 \le a \Rightarrow b_2$

$c_1 \cap a \le b_1 \le b_2 \Rightarrow c_1 \le c_2$

H10. $b \le a \Rightarrow b$

Из определения $a \Rightarrow b$

H11. $a \cap (a \Rightarrow b) = a \cap b$

1). $b \le (a \Rightarrow b)\textit{откуда}(a \cap a \Rightarrow b) \ge a \cap b$

2.) $\begin{matrix} a \cap (a \Rightarrow b) \le b \\ a \cap (a \Rightarrow b) \le a \end{matrix}$ тогда $a \cap (a \Rightarrow b) \le (a \cap b)$

H12. $(a \Rightarrow b) \cap b = b$

$a \Rightarrow b \ge b$

H13. $(a \Rightarrow b) \cap (a \Rightarrow c) = a \Rightarrow (b \cap c)$

1) $\left.\begin{matrix} b \cap c \le b \\ b \cap c \le c \end{matrix}\right\}$ следовательно $\left.\begin{matrix} a \Rightarrow b \ge a \Rightarrow (b \cap c) \\ a \Rightarrow c \ge a \Rightarrow (b \cap c) \end{matrix}\right\}$, $(a \Rightarrow b) \cap (a \Rightarrow c) \ge a \Rightarrow (b \cap c)$.

2). $\left.\begin{matrix} d = (a \Rightarrow b) \cap (a \Rightarrow c) \le a \Rightarrow b \\ d \le a \Rightarrow c \end{matrix}\right\}$откуда $\left.\begin{matrix} a \cap d \le b \\ a \cap d \le c \end{matrix}\right\}$ следовательно $a \cap d \le b \cap c$, что влечет $d \le a \Rightarrow (b \cap c)$. Из 1) и 2) получаем $d = a \Rightarrow b \cap c$.

H14. $(a \Rightarrow c) \cap (b \Rightarrow c) = (a \cup b) \Rightarrow c$

Пусть $d = (a \Rightarrow c) \cap (b \Rightarrow c)$, тогда:

1) $\left.\begin{matrix} a \cup b \ge a \\ a \cup b \ge b \end{matrix}\right\}$ тогда $\left.\begin{matrix} (a \cup b \to c) \le a \to c \\ (a \cup b \to c) \le b \to c \end{matrix}\right\}$ следовательно, $(a \cup b) \Rightarrow c \le d$

2) $\left.\begin{matrix} d \le a \Rightarrow c \\ d \le b \Rightarrow c \end{matrix}\right\}$тогда $\left.\begin{matrix} a \cap d \le c \\ b \cap d \le c \end{matrix}\right\}$ след-но $(a \cap d) \cup (b \cap d) \le c$ и $d \cap (a \cup b) \le c$ откуда $d \le (a \cup b) \Rightarrow c$.

Из 1) и2) получаем $(a \Rightarrow c) \cap (b \Rightarrow c) = (a \cup b) \Rightarrow c$.

H15. $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) = (a \cap b) \Rightarrow c = b \Rightarrow (a \Rightarrow c)$

$x \le a \Rightarrow (b \Rightarrow c) \Leftrightarrow a \cap x \le b \Rightarrow c \Leftrightarrow (a \cap b) \cap x \le c \Leftrightarrow x \le (a \cap b) \Rightarrow c$

$x \le b \Rightarrow (a \Rightarrow c) \Leftrightarrow b \cap x \le a \Rightarrow c \Leftrightarrow (b \cap a) \cap x \le c \Leftrightarrow x \le (a \cap b) \Rightarrow c$

H16. $c \Rightarrow a \le (c \Rightarrow (a \Rightarrow b)) \Rightarrow (c \Rightarrow b)$

$(c \Rightarrow (a \cap b) \le c \Rightarrow b) \mapsto (c \Rightarrow (a \cap (a \Rightarrow b)) \le c \Rightarrow b) \mapsto ((c \Rightarrow a) \cap (c \Rightarrow (a \Rightarrow b)) \le c \Rightarrow b) \mapsto$

$\mapsto (c \Rightarrow a \le (c \Rightarrow (a \Rightarrow b)) \Rightarrow (c \Rightarrow b)$

H17. $(a \Rightarrow b) \cap (b \Rightarrow c) \le a \Rightarrow c$

$\{(a \Rightarrow b) \cap (b \Rightarrow c) \cap a = a \cap (a \Rightarrow b) \cap (b \Rightarrow c) = a \cap b \cap (b \Rightarrow c) = a \cap b \cap c \le c\} \mapsto$

$\mapsto \{(a \Rightarrow b) \cap (b \Rightarrow c) \le a \Rightarrow c\}$

H18. $(a \Rightarrow b) \le (b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$

a) Из 17: $\{(a \Rightarrow b) \cap (b \Rightarrow c) \le a \Rightarrow c\} \mapsto \{(a \Rightarrow b) \le (b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c)\}$

H19. $a \le b \Rightarrow (a \cap b)$

поскольку $a \cap b \le a \cap b$.

H20. $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) \le (a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$

$\{a\bigcap(a\Rightarrow b)\bigcap(a\Rightarrow(b\Rightarrow c))=a\bigcap b\bigcap(a\Rightarrow(b\Rightarrow c))=a\bigcap b\bigcap(b\Rightarrow c)=a\bigcap b\bigcap c\le c\}\mapsto$

$\mapsto\{(a\Rightarrow b)\bigcap(a\Rightarrow(b\Rightarrow c))\le a\Rightarrow c\Rightarrow(a\Rightarrow(b\Rightarrow c))\le(a\Rightarrow b)\Rightarrow(a\Rightarrow c)$

21. $c\bigcap((c\bigcap a)\Rightarrow(c\bigcap b))=c\bigcap(a\Rightarrow b)$

$\{(c\bigcap a)\Rightarrow(c\bigcap b)=((c\bigcap a)\Rightarrow c)\bigcap((c\bigcap a)\Rightarrow b)=(c\bigcap a)\Rightarrow b\ge a\Rightarrow b\}\mapsto$

1) $\mapsto c\bigcap((c\bigcap a)\Rightarrow(c\bigcap b))\ge c\bigcap(a\Rightarrow b)$

2) В силу 11

$\{a\bigcap c\bigcap((c\bigcap a)\Rightarrow(c\bigcap b))=(c\bigcap a)\bigcup(c\bigcap b)\le b\}\mapsto\{c\bigcap((c\bigcap a)\Rightarrow(c\bigcap b))\le a\Rightarrow b\}\mapsto$

$\mapsto\{c\bigcap((c\bigcap a)\Rightarrow(c\bigcap b))\le c\bigcap(a\Rightarrow b)\}$

Псевдобулевой называют импликативную решетку с 0 и дополнительной унарной операцией (-) <A, ∩,∪,⇒, -, 0,1>, в которой операция (-) определяется следующим образом: -a= a⇒0. При этом -a называется псевдодополнением элемента a и является наибольшим элементом решетки c∈A из всех, для которых c∩a=∅.

В псевдобулевой алгебре:

(H22) $a\le b\Rightarrow -b\le -a$.

Действительно: 0=-b∩b= -b∩(b∪a)=(-b∩b) ∪(-b∩a)= -b∩a откуда -b≤-a.

(H23) -0=1, -1=0

По определению -0= 0⇒0=1 (вследствие (3)) , из (5) получим -1=1⇒0=0.

(H24) -a∩a=0.

Действительно -a∩a=(a⇒0) ∩a=(в следствие (11))= 0∩ a=0.

(H25) -(-a∩a)=1.

Следствие (23), (24).

(H26) $a\le --a$

По определению --a= (a⇒0)⇒0), пусть (a⇒0)⇒0)=c, тогда c∩(a⇒0)≤0, но a∩(a⇒0)≤0, следовательно $a\le --a$=c.

(H27) $---a=-a$.

По (26) $a\le --a$, следовательно, из (22) имеем -a≤---a, но -a∩--a≤0, откуда -a≥---a, следовательно $---a=-a$.

(H28) $-(a\bigcup b)=-a\bigcap -b$.

По (14) (a∪ b)⇒0=(a⇒0)∩(b⇒0), т.е. $-(a\bigcup b)=-a\bigcap -b$.

(H29) $-a\bigcup -b\le -(a\bigcap b)$.

А) Из (8), свойств операции ∪, и отношения ≤ имеем: (a⇒0)∪(b⇒0)≤(a∩ b)⇒0.

Б) Перепишем (29) в виде (-a∪-b)≤(a∩ b)⇒0. Действительно,

(-a∪-b)∩(a∩ b)=(-a∩a∩ b)∪ (-b∩a∩ b)= 0, следовательно (-a∪-b)≤-(a∩ b).

(H30) $-a\bigcup b\le a\Rightarrow b$.

Утверждение следует из того, что(-a∪b) ∩a=(-a∩a)∪(a∩ b))≤b.

(H31) $a\Rightarrow b\le -b\Rightarrow -a$

Из (17) получим (a⇒b)∩(b⇒0) ≤ a⇒0, что дает искомое.

(H32) $a\Rightarrow -b=-(a\bigcap b)=b\Rightarrow -a$

Перепишем (32) в виде (a⇒ (b⇒0))= (a∩ b)⇒ b= b⇒(a⇒0), что верно в силу (15).

(H33) $a\Rightarrow -b=--(a\Rightarrow -b)$

Из (32) (a⇒-b)= -(a∩b), в силу (27) -(a∩b)= ---(a∩b)= --(a⇒-b) ,

(H34) $--(a\Rightarrow b)\le a\Rightarrow --b$.

В силу (26) и (9) a⇒b≤ a⇒--b, откуда (применив два раза) (25) получим --(a⇒b)≤ --(a⇒--b)=(по (36))= a⇒--b, откуда получаем искомое.

(H35) 0⇒a=1. Следует из (1).

(H36) a∪-a≤1.

Заменив в (30) b на a получим a∪-a≤ a⇒a=1.

В интуиционистской логике следующие формулы являются тавтологиями [9. с.446-447].

I1 $a \to a$

I2 $a \to (\beta \to a)$

I3 $a \to (\beta \to (a \cap \beta))$

I4 $(a \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$

I5 $(a \to (\beta \to \gamma)) \to ((a \to \beta) \to (a \to \gamma))$

I6 $(a \to --a)$

I7 $-(a \cap -a)$

I8 $((-a \cup \beta) \to (\alpha \to \beta))$

I9 $(-(a \cup b) \Rightarrow (-a \cap -\beta))$

I10 $((-a \cap -b) \Rightarrow -(a \cup b))$

I11 $((-a \cup -\beta) \to -(a \cap \beta))$

I12 $((a \to \beta) \to (-\beta \to \alpha))$

I13 $((a \to -\beta) \to (\beta \to -a))$

I14 $(---a \Rightarrow -a)$

I15 $(-a \Rightarrow ---a)$

I16 $(--(a \to \beta) \to (a \to --\beta))$

I17 $((\gamma \to a) \to (\gamma \to (a \to \beta)) \to (\gamma \to \beta))$

Рассматривая интуиционистское исчисление высказываний как алгебру вида <A,∨, ∧,→, -, 0,1> подобную псевдобулевой алгебре <A, ∩,∪,⇒, -, 0,1>, причем операциям ∨, ∧,→,-, в интуиционистском исчислении высказываний соответствуют операции , ∩,∪,⇒, -, псевдобулевой алгебры. В псевдобулевой алгебре как было показано $a \Rightarrow b = 1 \Leftrightarrow a \le b$ (1). С учетом этого легко показать эквивалентность системы аксиом I_1 -I_{17} системе аксиом псевдобулевой алгебры (25)-(36), т.е. существует взаимо-обратное соответствие между системой аксиом интуиционистского исчисления высказываний и системой аксиом псевдобулевой алгебры.

I1. $a \to a$

В псевдобулевой алгебре ей эквивалентна формула a⇒a=1, которая доказана выше (3).

I2 $a \to (\beta \to a)$

В псевдобулевой алгебре эквивалентная формула a⇒(b⇒a)=1. Из определения псевдодопллнения имеем (b⇒a)≥ a, тогда из (1) получим a⇒(b⇒a)=1, что эквивалентно I2.

I3. T_{14} $a \to (\beta \to (a \cap \beta))$

В псевдобулевой алгебре эквивалентная формула a⇒(b⇒(a∩b))=1. Из (13) b⇒(a∩b)=(b⇒a)∩(b⇒b)= (b⇒a), но (b⇒a)≥ a, откуда из (1) получаем a⇒(b⇒(a∩b))=1.

I4. $(a \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$

В псевдобулевой алгебре эквивалентная формула (a⇒(b⇒c))⇒(b⇒(a⇒c))=1. Из (15) имеем (a⇒(b⇒c))= (b⇒(a⇒c)), тогда из (2) (a⇒(b⇒c))⇒(b⇒(a⇒c))=1.

I5. $(a \to (\beta \to \gamma)) \to ((a \to \beta) \to (a \to \gamma))$

В псевдобулевой алгебре эквивалентная формула (a⇒(b⇒c))⇒((a⇒b)⇒ (a⇒c))=1. Из (20) (a⇒(b⇒c))≤ ((a⇒b)⇒ (a⇒c)), тогда из (1)))⇒((a⇒b)⇒ (a⇒c))=1.

I6. $(a \to --a)$

В псевдобулевой алгебре эквивалентная формула a⇒--a=1, что следует из (26) и (1).

I7. $-(a \cap -a)$

В псевдобулевой алгебре эквивалентная формула -(a∩-a)=1. Следует из (23) и (24).

I8 $\left(\left(-a\bigcup\beta\right)\to\left(\alpha\to\beta\right)\right)$

В псевдобулевой алгебре эквивалентная формула (-a∪b)⇒(a⇒b))=1. Следует из (30) и (1).

I9. $\left(-\left(a\bigcup b\right)\Rightarrow\left(-a\bigcap-\beta\right)\right)$

В псевдобулевой алгебре эквивалентная формула (-(a∪b)⇒(-a∩-b))=1. Следует из (28) и (3).

I_{10}. $\left(\left(-a\bigcap-b\right)\Rightarrow-\left(a\bigcup b\right)\right)$

В псевдобулевой алгебре эквивалентная формула ((-a∩-b)⇒-(a∪b))=1. Следует из (28) и (3).

I_{11}. $\left(\left(-a\bigcup-\beta\right)\to-\left(a\bigcap\beta\right)\right)$

В псевдобулевой алгебре эквивалентная формула ((-a∪-b) ⇒-(a∩b))=1. Перепишем в виде ((a ⇒0)∪(b⇒0) ⇒((a∩b)⇒0)=1, что следует из (8) и (30.

$I_{12.}$ (α→β)→(-β→-α)

В псевдобулевой алгебре эквивалентная формула (a⇒b)⇒(-b⇒-a)=1.Из определения псевдодополнения (-b⇒-a)=(a⇒0)⇒(b⇒0). Согласно (18) получим (a⇒0)⇒(b⇒0)≥ (a⇒b), что с учетом (3) дает искомый результат.

I13. $\left(\left(a\to-\beta\right)\to\left(\beta\to-a\right)\right)$

В псевдобулевой алгебре эквивалентная формула (a⇒-b)⇒(b⇒-a)=1. Из определения псевдодополнения имеем: (a⇒-b)=(a⇒(b⇒0)). Из утверждения (15) получим: a⇒(b⇒0)=(a∩b)⇒0=(b⇒(a⇒0)= (b⇒-a). Откуда из(3) (a⇒-b)⇒(b⇒-a)=1.

I14. $\left(---a\Rightarrow-a\right)$

В псевдобулевой алгебре эквивалентная формула (---a⇒-a)=1. Следует из (27) и (3).

$I_{15.}$ $\left(-a\Rightarrow---a\right)$

В псевдобулевой алгебре эквивалентная формула (-a⇒---a)=1. Следует из (27) и (3).

I16. $\left(--\left(a\to\beta\right)\to\left(a\to--\beta\right)\right)$

В псевдобулевой алгебре эквивалентная формула --(a⇒b)⇒(a⇒--b)=1. Следует из (34) и (1).

I17. $\left(\left(\gamma\to a\right)\to\left(\gamma\to\left(a\to\beta\right)\right)\to\left(\gamma\to\beta\right)\right)$.

В псевдобулевой алгебре эквивалентная формула (c⇒a)⇒(c⇒(a⇒b)⇒(c⇒b))=1. Следует из (16) и (1).

Таким образом, псевдобулева алгебра элементарно эквивалентна интуиционистскому исчислению предикатов и, следовательно, аксиоматика псевдобулевой алгебры позволяет реконструировать аксиоматику интуиционистского исчисления предикатов. Как указывалось выше, формула A∨¬A не является интуиционистской тавтологией, что подтверждается формулой (36) истинной в псевбодулевой алгебре. Можно сделать вывод, что структура псевдобулевой алгебры позволяет реконструировать логику без закона исключенного третьего, однако с законом противоречия.

Интуиционистскими тавтологиями не являются:

t_{12} a ∪ −a

t_{13} − −a → a

t_{20} ((a → b) → (−a ∪ b))

t_{24} (−(a ∩ b) → (− a ∪ b))

t_{28} ((−a → b) → (−b → a))

t_{29} ((−a → −b) → (b → a))

t_{30} (((a → b) → a) → a)

Каждая интуиционистски доказуемая формула является тавтологией и наоборот.

Таким образом, формализация (алгебраизация) традиционной пропозициональной логики приводит нас к представлению исчисления высказываний как булевой алгебры, оценка каждой формулы которой определяется гомоморфизмом в булеву алгебру, элементами которой являются истинностные значения этих высказываний. Аналогично в случае интуиционистской пропозициональной логики алгебра высказываний является псевдобулевой алгеброй, которой соответствует псевдобулева алгебра значений истинности.

Введем следующее обобщение приведенных примеров. Будем считать, что каждой структуре, носитель которой может быть признан совокупностью значений истинности высказываний, соответствует свой вариант пропозициональной логики. Т.е. каждому высказыванию пропозиционального исчисления соответствует отображение F: $A^n \to A$. A здесь некоторая структура, элементам носителя которой придается смысл значений истинности высказываний.

Если выделено семейство структур, элементы которых могут играть роль значений истинности пропозициональных формул, то исчисление высказываний и соответствующая ему алгебраическая структура из указанного класса могут рассматриваться как элементарно эквивалентные модели одной и той же теории. Это обстоятельство может служить основой для построения соответствующего исчисления высказываний.

3 Реконструкция вариантов паранепротиворечивых логик.

В качестве еще одного варианта применения этого принципа рассмотрим возможный подход к разработке исчисления высказываний свободного от закона противоречия.

Чтобы получить логику без закона противоречия выберем в качестве структуры, по которой будет реконструироваться такая логика, алгебру двойственную псевдобулевой, т.е. алгебру Брауэра. Алгебра Брауэра это структура вида $\langle A, \cap, \cup, -, 0, 1 \rangle$, где (-) –относительная псевдоразность элементов алгебры.

В алгебре Брауэра $\langle A, \cap, \cup, -, 0, 1 \rangle$, истинны следующие формулы:

B1. $b-a=0 \Leftrightarrow b \le a$

1) $b-a=0 \Leftrightarrow a \bigcup 0 = a \ge b$

2) $a \le b \Rightarrow a \bigcap c \le b \quad \forall c \in A \Rightarrow$ b-a=0.

B2. $a=b \Leftrightarrow b-a=0=a-b$

Из 1 $b \le a$ и $a \le b \Rightarrow a=b$.

B3. $a-a=0$

$a \cup c \ge a \quad \forall c \in A \Rightarrow a-a=0$

B4. $0-a=0$

$\forall c \in A \quad a \cup c \ge 0 \Rightarrow 0-a=0$

B5. $b-0=b$

$\forall c \in A \quad 0 \bigcup c = c \ge b \Rightarrow c \Rightarrow b \Rightarrow \Rightarrow b-0=b$

B6. $(a-a) \bigcap b = b$

$0 \bigcup b = b$

B7. $a \bigcup (b-a) \ge b$

Из определения $b-a$

B8. if $a_1 \le a_2$ то $b-a_2 \le b-a_1$

Пусть $c_1 = b-a_1, \quad c_2 = b-a_2$, тогда $\quad a_2 \bigcup c_1 \ge a_1 \bigcup c_1 \ge b \Rightarrow c_2 \le c_1$

B9. if $b_1 \le b_2$ то $b_1 - a \le b_2 - a$

$c_2 \bigcup a \ge b_2 \ge b_1 \Rightarrow c_2 \ge c_1$

B10. $b \ge b-a$

Из определения $b-a$

B11. $a \bigcup (b-a) = a \bigcup b$

$$b \ge b-a \Rightarrow a \bigcup b \ge a \bigcup (b-a) \qquad \left.\begin{array}{l} a \bigcup (b-a) \ge a \\ a \bigcup (b-a) \ge b \end{array}\right\} \Rightarrow a \bigcup b \le a \bigcup (b-a)$$

B12 $(b-a) \bigcup b = b$

$b-a \le b$

B13. $(b-a) \bigcup (c-a) = (b \bigcup c) - a$

$b\bigcup c\ge b$

1. $b\bigcup c\ge c\Rightarrow (b\bigcup c)-a\ge (b-a)\bigcup (b-c)=d$

2. $\begin{matrix} d\ge b-a \\ d\ge c-a \end{matrix}\Rightarrow \begin{matrix} a\bigcup d\ge b \\ a\bigcup d\ge c \end{matrix}\Rightarrow a\bigcup d\ge (b\bigcup c)\Rightarrow d\ge (b\bigcup c)-a\Rightarrow |(3)(4)|\Rightarrow d=(b\bigcup c)-a$

B14. $(c-a)\bigcup (c-b)=c-(a\bigcap b)$

$d=(c-a)\bigcup (c-b)$

1. $\begin{matrix} a\bigcap b\le a \\ a\bigcap b\le b \end{matrix}\Rightarrow \begin{matrix} c-(a\bigcap b)\ge c-a \\ c-(a\bigcap b)\ge c-b \end{matrix}\Rightarrow c-(a\bigcap b)\ge d \quad (3)$

2. $\begin{matrix} d\ge c-a \\ d\ge c-b \end{matrix}\Rightarrow \begin{matrix} d\bigcup a\ge c \\ d\bigcup b\ge c \end{matrix}\Rightarrow (d\bigcup a)\bigcap (d\bigcup b)\ge c\Rightarrow d\bigcup (a\bigcap b)\ge c\Rightarrow$

$\Rightarrow d\ge c-(a\bigcap b)\Rightarrow d=c-(a\bigcap b)$.

B15. $(c-b)-a=c-(a\bigcup b)=(c-a)-b$

$x\ge (c-b)-a\Leftrightarrow x\bigcup a\ge c-b\Leftrightarrow x\bigcup (a\bigcup b)\ge c\Leftrightarrow x\ge c-(a\bigcup b)$

$x\ge (c-a)-b\Leftrightarrow x\bigcup b\ge c-a\Leftrightarrow x\bigcup (a\bigcup b)\ge c\Leftrightarrow x\ge c-(a\bigcup b)$

B16. $a-c\ge (b-c)-((b-a)-c)$

$(a\bigcup b)-c\ge b-c\Rightarrow (a\bigcup (b-a))-c\ge b-c\Rightarrow (a-c)\bigcup ((b-a)-c)\ge b-c\Rightarrow$

$\Rightarrow (a-c)\ge (b-c)-((b-a)-c)$

B17. $(b-a)\bigcup (c-b)\ge c-a$

$(b-a)\bigcup (c-b)\bigcup a=a\bigcup b\bigcup (c-b)=a\bigcup b\bigcup c\ge c\Rightarrow$

$(b-a)\bigcup (c-b)\ge c-a$

B18. $(b-a)\ge (c-a)-(c-b)$

Из 17б: $(b-a)\bigcup (c-b)\ge c-a\Rightarrow (b-a)\ge (c-a)-(c-b)$

B19. $a\ge (a\bigcup b)-b$

б) $a\bigcup b\le a\bigcup b$

B20. $(c-b)-a\ge (c-a)-(b-a)$

$a\bigcap (b-a)\bigcup ((c-b)-a)=a\bigcup b\bigcup (c-b)=a\bigcup b\bigcup c\ge c\Rightarrow$

$\Rightarrow (b-a)\bigcup ((c-b)-a)\ge c-a\Rightarrow (c-b)-a\ge (c-a)-(b-a)$

B21. $c\bigcup ((c\bigcup b)-(c\bigcup a))=(b-a)\bigcup c$

В силу 13 (c∪b)-(c∪a) = (c-(c∪a))∪(b-(c∪a)) = b-(c∪a) ≤ b-a.⇒
⇒ c∪((c∪b)-(c∪a))≤ c∪(b-a).
В силу 11 a∪c∪((c∪b)-(c∪a))=(a∪c)∪(c∪b)≥b ⇒ c∪((c∪b)-(c∪a))≥ b-a ⇒
⇒ c∪((c∪b)-(c∪a)) ≥ c∪(b-a).

Введем следующее обозначение для ∪- дополнения в алгебре Брауэра -a=1-a. Псевдоразностью – a или ∪ - дополнением элемента a называется наименьший элемент c′∈A решетки такой, что c′∪a=1. В дистрибутивных решетках c≤c′.

Легко показать, что в алгебре Брауэра истинны следующие формулы.

(B22) $a\ge b\Rightarrow -b\ge -a$

(B23) -0=1, -1=0.

(B24) a∪-a=1.

(B25) -(a∪-a)=1.

(B26) $a\ge --a$

(B27) $---a=-a$

(B28) $-\left(a\bigcap b\right)=-a\bigcup -b$

(B29) -a∩-b≥(a∪b)

(B30) $-a\bigcap b\geq a\Rightarrow b$

(B31) $a\Rightarrow b\geq -b\Rightarrow -a$

(B32) $a\Rightarrow u-b=--\left(a\Rightarrow -b\right)$

(B33) $--\left(a\Rightarrow b\right)\geq a\Rightarrow --b$

(B34)-b-a=- (a∪b)=-a-b

(B35) a-1=0.

(B36) a∩-a≥0.

В В алгебре Брауэра выполняется условие a∩-a≥0, и, следовательно, в "индуцированной" этой решеткой пропозициональной логике не выполняется закон противоречия и формула ¬(α∧¬α) не является тавтологией.

Действительно:

1.Если в решетке есть 0,1, то из определения следует -1=0, -0=1.

2.Следовательно –(–a∪a)=0.

3. Т.к. –a∪a=1, то a≥(1–a)=(– –a).

4. По определению -(a∪b)=1-(a∪b). Из дистрибутивности (-a∩-b)∪(a∪ b)=

(-a∪a∪ b)∪(-b∪ a∪ b)=1, следовательно, (-a∩-b)≥ -(a∪b). Тогда (-a∩--a)≥ -(a∪-a), и из 1 и 3 следует (-a∩a) ≥0.

5. Поскольку a≥b влечет -a≤- b, то из 1 и 4 следует, что -(-a∩a)≤1, а это и означает, что ¬(α∧¬α) не является тавтологией.

Пропозициональное исчисление, реконструипрованное по алгебре Брауэра назовем B-логикой <A, ∩,∪, ÷,¬, 0, 1>, ¬a=1÷ a. В этом исчислении тавтологиями не являются:

¬(¬a∩a)

¬¬(a ÷¬¬ a)

¬((β∩¬ a) ÷ (β ÷ a))

¬((¬ β∩¬ a) ÷ ¬ (β∪ a))

¬((a ÷¬ β)÷ (β÷¬ a))

¬((a ÷ β)÷ (¬ β÷¬ a))

¬(((a ÷ (a ÷(β÷ a)))

Которые являются тавтологиями в булевой алгебре при условии замены

−(a → β)= (β ÷ a), т.е. призаписи законов булевой алгебры в двойственных формулировках.

Вариант логики без законов исключенного третьего и противоречия может быть реконструирован, если в качестве семантической структуры взять решетку с двумя видами дополнения.

В частности, покажем, что такая структура эквивалентна исчислению H-B логики.

Список аксиом H-B логики состоит из всех формул вида [10]:

1. (α → β) → ((β → γ)→ (α→ γ)) 2. α→ α ∨ β
3.β→ α ∨ β 4. (α →γ) ((β→ γ) → (α ∨ β→ γ))
5. α ∧ β→ α 6. α ∧ β→ β
7. (γ→α) → ((γ→β) → (γ→α∧ β)) 8. (α → (β→ γ)) → (α ∧ β → γ)
9. (α ∧ β→ γ)→ (α → (β→ γ)) 10. α → (β ∨ (α ÷ β))
11. (α→ β) → (¬β → ¬α) 12. (α ÷ β) → ┌(α→ β)
13. ((α ÷ β) ÷ γ) → (α ÷ β ∨ γ) 14. ¬(α ÷ β) → (α→ β)
15.. (α → (γ ÷ γ)) → ¬α 16. ¬α → (α → (γ ÷ γ))
17. ((γ→γ) ÷ α) → ┌α 18. ┌α→ ((γ→γ) ÷ α)

Единственными правилами вывода являются modus ponens и

(┌) α / (¬ ┌ α).

H-B исчисление есть алгебра <A, ∩,∪, →,÷,¬, ┌ , 0,1> [10].

В качестве семантической структуры, выберем структуру вида <A, ∩,∪, ⇒,÷,−,┐ , 0,1> , которую назовем H-B –алгеброй. Это решетка, в которой для любых двух элементов существует псевдодополнение (⇒), и псевдоразность (÷). В такой решетке для каждого ее элемента a существует два вида дополнения: ∩-дополнение: –a= a⇒0, и ∪-дополнение ┐ a= 1÷a. В [9] показано, что ┐ a≥–a.

Для операции ($\Rightarrow$) и отрицания ($-$) истинны утверждения (Н1-Н34), для ($\div$) и ($\urcorner$) (В1-В34).

Аксиомы (1-9, 11) есть аксиомы интуиционистской логики и потому истинны в Н-В логике.

10. $\alpha\to (\beta \vee (\alpha \div \beta))$

Из определения операции ($\div$) получим, что $(\beta \vee (\alpha \div \beta))\geq \alpha$.. Тогда (10) следует из Н1.

12. $(\alpha \div \beta) \to \ulcorner(\alpha\to \beta)$

Из свойств дополнений $\urcorner(\alpha\to \beta)\geq -(\alpha\to \beta)$, кроме того по определению $\urcorner(\alpha\to\beta)\cup(\alpha\to\beta)\equiv 1$, откуда $\urcorner(\alpha\to\beta)\cup(\alpha\to\beta)\geq \alpha\cup(\alpha\to\beta)= (\alpha\cap\urcorner\beta)\cup(\alpha\to\beta)\geq (\alpha\cap-\beta)\cup(\alpha\to\beta)$, откуда $\urcorner(\alpha\to\beta)\geq (\alpha\cap-\beta)$ (12.1), иначе $\alpha\cup(\alpha\to\beta)\equiv 1$, но в решетке $A^{a\cap b}$ $\alpha\cup(\alpha\to\beta)= \alpha\cup-\alpha$.- противоречие. Неравенство (12.1) и Н1 дают искомый результат.

13. $((\alpha \div \beta) \div \gamma)\to (\alpha \div \beta \vee \gamma)$

Из В15 $(\alpha \div \beta) \div \gamma)=(\alpha \div \beta \vee \gamma)$, тогда из Н1 следует (13).

14. $\neg(\alpha \div \beta) \to (\alpha\to \beta)$.

Действительно $-(\alpha \div \beta) \cap(\alpha \div \beta)=0$, следовательно $\neg(\alpha \div \beta) \cap(\alpha \div \beta)\geq 0$. таким образом $0=-(\alpha \div \beta) \cap(\alpha \div \beta)\leq \beta\cap(\alpha \div \beta)= (-\alpha \cup \beta) \cap(\alpha \div \beta) \leq$/в соответствии с (Н36)/$\leq (\alpha\to \beta) \cap(\alpha \div \beta)$, откуда $(\alpha\to \beta)\geq \urcorner(\alpha \div \beta)$ (14.1), иначе $\beta\cap(\alpha \div \beta)\equiv 0$, но в решетке $A_{a\cup b}$ $\beta\cap(\alpha\div\beta)= \beta\cap \urcorner\beta\geq 0$ –противоречие. Неравенство (14.1) и Н1 дают искомый результат.

15.. $(\alpha\to (\gamma \div \gamma)) \to\neg\alpha$

Из В3 $(\gamma \div \gamma)=0$, тогда (15) следует из определения псенвдодополнения.

16. $\neg\alpha \to (\alpha \to (\gamma \div \gamma))$

Из В3 $(\gamma \div \gamma)=0$, тогда $(\alpha\to (\gamma \div \gamma)) = -\alpha$. Откуда из Н3 $-\alpha\to (\alpha \to(\gamma \div \gamma))$.

17. $((\gamma\to\gamma) \div \alpha) \to \ulcorner\alpha$

Из Н3 $(\gamma\to\gamma)=1$, тогда по определению $((\gamma\to\gamma) \div \alpha)= \urcorner\alpha$, откуда $((\gamma\to\gamma) \div \alpha) \to\urcorner\alpha$.

18. $\urcorner\alpha\to ((\gamma\to\gamma) \div \alpha)$

Доказывается так же как (17).

Заключение

Классификация вариантов пропозициональной логики на основе классификации алгебраических структур может оказаться полезным инструментом генерирования вариантов пропозициональной логики при моделировании задач управления сложными объектами и системами.

Придание понятию «истинность» не числового, а структурного характера расширяет, как показано выше возможности по реконструкции вариантов пропозициональной логики, а значит и расширяет возможности инструмента моделирования в задачах управления сложными системами.

Литература

1 *Г.В.Ф. Гегель*. Энциклопедия философских наук. М. «Мысль», 1974. т.1.
2. *Лосев А.Ф.* «Философия имени».: М. МГУ, 1990. с.19.
3. Васильев Н.А. «Воображаемая логика». Избранные труды.: М. «Наука». 1989. с.14.
4. *Смирнов В.А.* Значение метода логической реконструкции для истории логики и философии// Смирнов В.А. Логико-философские труды. М. 2001.
5. *Васюков.В.Л.* Проблема логической реконструкции математических структур//Философия математики, актуальные проблемы// Материалы Международной научной конференции. М.2007.
6. *А.В.Титов.* Об алгебраической классификации вариантов пропозициональной логики//Философия математики, актуальные проблемы// Материалы Международной научной конференции. М.2007.
7. *Font J.V., Jansana R. and Pigozzi D. A* Survey of Abstrakt Algebraik Logik// Studia Logika, vol. 74, № 1/2, 2003. pp. 3-97.
8. *А..Н.Колмогоров, А.Г.Драгалин.* Введение в математическую логику. - М.: МГУ, 1982. - 120 с.
9. *Е.Рассева, Р.Сикорский.* Математика метаматематики. М. «Наука», 1972.
10. *Васюков В.Л.* «Категорная логика».:М. АНО Институт логики. 2005.