ДЕКОМПОЗИЦИЯ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ ВРЕМЕННЫМИ МАСШТАБАМИ[39]

Макаров Д.А., Соболев В.А.

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,
Россия, г. Москва, Вавилова, 44, корп. 2.
Самарский национальный исследовательский университет,
Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34.
makarov@isa.ru, hsablem@gmail.comu

Аннотация: В статье рассматривается задача декомпозиции сингулярно возмущенной системы с несколькими масштабами времени. Показано, что рассматриваемая система сводится к нескольким подсистемам меньшей размерности. Решения возникающих при построении расщепляющего преобразования нелинейных матричных уравнений эффективно вычисляются в виде асимптотических разложений по степеням малых параметров.

Ключевые слова: устойчивость, системы с несколькими временными масштабами, сингулярные возмущения, интегральные многообразия.

Введение

Целью данной работы является исследование задачи понижения порядка для систем с несколькими временными шкалами. Такие системы естественным образом возникают при решении задач управления развитием крупномасштабных систем и моделируются дифференциальными уравнениями с несколькими малыми множителями при производных.

Для упрощения решения этой задачи воспользуемся методом декомпозиции рассматриваемой системы на n независимые подсистемы с помощью преобразования расщепления. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= \sum_{k=0}^{n} A_{0,k} x_k, \\ \varepsilon_1 \dot{x}_1 &= \sum_{k=0}^{n} A_{1,k} x_k, \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dot{x}_2 &= \sum_{k=0}^{n} A_{2,k} x_k, \\ &\dots \\ \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k \dot{x}_n &= \sum_{k=0}^{n} A_{n,k} x_k. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $x_k \in R^{m_k}$, $k = \overline{0,n}$, ε_k – положительные малые параметры, $\varepsilon_k \in (0, \varepsilon_k^{(0)}]$, $k = \overline{1,n}$. Точка над переменной означает дифференцирование по времени t. Матрицы $A_{j,k}$, $j = \overline{0,n}$ могут быть постоянными или зависеть от t, параметров ε_k и некоторых дополнительных параметров. Соответствующие предположения описаны ниже в разделе «Основные предположения и возможные приложения». Наша задача – построить преобразование расщепления, которое приводит систему (1) к блочно-диагональной форме вида

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 &= A_0 y_0, \\ \varepsilon_1 \dot{y}_1 &= A_1 y_1, \\ \varepsilon_2 \varepsilon_2 \dot{y}_2 &= A_2 y_2, \\ &\dots \\ \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k \dot{y}_n &= A_n y_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Системы вида (1) возникают при математическом моделировании широкого круга задач управления, характерной особенностью которых является наличие процессов, протекающих с разной

[39] *Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00202, https://rscf.ru/project/21-11-00202/*

скоростью (см., например, [1]-[8] и цитируемую литературу в них). Основные трудности при изучении таких систем – это их высокая размерность и вычислительная жесткость. Поэтому важная роль при анализе таких задач отводится методам уменьшения размерности и устранения вычислительной жесткости.

Разработанный в данной работе метод позволяет привести исходную динамическую модель (1) к виду (2), где каждая подсистема независима, имеет относительно небольшую размерность и характеризуется одним масштабом времени.

1 Система с двумя параметрами

Для наглядности начала рассмотрим случай, когда в (1) $n = 2$, т.е. систему

$$\dot{x}_0 = A_{0,0}x_0 + A_{0,1}x_1 + A_{0,2}x_2,$$
$$\varepsilon_1\dot{x}_1 = A_{1,0}x_0 + A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2,$$
$$\varepsilon_1\varepsilon_2\dot{x}_2 = A_{2,0}x_0 + A_{2,1}x_1 + A_{2,2}x_2.$$

Здесь $x_k \in R^{m_k}$, $k = \overline{0,2}$, $t \in R$, ε_k – положительные малые параметры, $\varepsilon_k \in (0, \varepsilon_k^{(0)}]$, $k = 1,2$, $\varepsilon_0 = 1$. Итак, мы хотим построить преобразование расщепления, которое приводит эту систему к блочно-диагональной форме вида

$$\dot{y}_0 = A_0 y_0,$$
$$\varepsilon_1\dot{y}_1 = A_1 y_1, \qquad (3)$$
$$\varepsilon_1\varepsilon_2\dot{y}_2 = A_2 y_2.$$

Построение преобразования будет состоять из нескольких последовательных этапов.

1.1 Первый этап

На первом этапе мы вводим новую переменную y_2 по формуле $x_2 = y_2 + L_{2,0}x_0 + L_{2,1}x_1$ и получаем следующие дифференциальные уравнения

$$\dot{x}_0 = (A_{0,0} + A_{0,2}L_{2,0})x_0 + (A_{0,1} + A_{0,2}L_{2,1})x_1 + A_{0,2}y_2,$$
$$\varepsilon_1\dot{x}_1 = (A_{1,0} + A_{1,2}L_{2,0})x_0 + (A_{1,1} + A_{1,2}L_{2,1})x_1 + A_{1,2}y_2,$$

и $\varepsilon_1\varepsilon_2\dot{y}_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{L}_{2,0}x_0 + \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{L}_{2,1}x_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 L_{2,0}\dot{x}_0 + \varepsilon_1\varepsilon_2 L_{2,1}\dot{x}_1 = (A_{2,0} + A_{2,2}L_{2,0})x_0 + (A_{2,1} + A_{2,2}L_{2,1})x_1 + A_{2,2}y_2.$

Подставляя выражения для производных в последнее уравнение, получаем

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\dot{y}_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{L}_{2,0}x_0 + \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{L}_{2,1}x_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 L_{2,0}[(A_{0,0} + A_{0,2}L_{2,0})x_0 + (A_{0,1} + A_{0,2}L_{2,1})x_1 + A_{0,2}y_2]$$
$$+\varepsilon_2 L_{2,1}[(A_{1,0} + A_{1,2}L_{2,0})x_0 + (A_{1,1} + A_{1,2}L_{2,1})x_1 + A_{1,2}y_2] = (A_{2,0} + A_{2,2}L_{2,0})x_0 + (A_{2,1} + A_{2,2}L_{2,1})x_1 + A_{2,2}y_2.$$

Предположим, что матрицы $L_{2,0}, L_{2,1}$ удовлетворяют следующим уравнениям

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\dot{L}_{2,0} + \varepsilon_1\varepsilon_2 L_{2,0}(A_{0,0} + A_{0,2}L_{2,0}) + \varepsilon_2 L_{2,1}(A_{1,0} + A_{1,2}L_{2,0}) =$$
$$A_{2,0} + A_{2,2}L_{2,0}, \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{L}_{2,1} + \varepsilon_1\varepsilon_2 L_{2,0}(A_{0,1} + A_{1,2}L_{2,1}) + \varepsilon_2 L_{2,1}(A_{1,1} + A_{1,2}L_{2,1}) = A_{2,1} + A_{2,2}L_{2,1},$$

тогда получаем независимое уравнение для y_2 вида
$\varepsilon_1\varepsilon_2\dot{y}_2 = (A_{2,2} - \varepsilon_1\varepsilon_2 L_{2,0}A_{0,2} - \varepsilon_2 L_{2,1}A_{1,2})y_2.$

Полагая ${}_1A_{0,0} = A_{0,0} + A_{0,2}L_{2,0}$, ${}_1A_{0,1} = A_{0,1} + A_{0,2}L_{2,1}$, ${}_1A_{1,0} = A_{1,0} + A_{1,2}L_{2,0}$, ${}_1A_{1,1} = A_{1,1} + A_{1,2}L_{2,1}$ и $A_2 = A_{2,2} - \varepsilon_1\varepsilon_2 L_{2,0}A_{0,2} - \varepsilon_2 L_{2,1}A_{1,2}$ получаем в результате первого этапа следующую дифференциальную систему

$$\dot{x}_0 = {}_1A_{0,0}x_0 + {}_1A_{0,1}x_1 + A_{0,2}y_2$$
$$\varepsilon_1\dot{x}_1 = {}_1A_{1,0}x_0 + {}_1A_{1,1}x_1 + A_{1,2}y_2,$$
$$\varepsilon_1\varepsilon_2\dot{y}_2 = A_2 y_2.$$

1.2 Второй этап

Наша следующая цель – исключить переменную y_2 из дифференциальных уравнений для x_0 и x_1 в последней дифференциальной системе. Введем новые переменные $v_{1,0}$ и $v_{1,1}$ по формулам $x_0 = v_{1,0} + \varepsilon_1\varepsilon_2 H_{1,0} y_2$, $x_1 = v_{1,1} + \varepsilon_2 H_{1,1} y_2$. Тогда получим

$$\dot v_{1,0} + \varepsilon_1\varepsilon_2 \dot H_{1,0} y_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 H_{1,0}\dot y_2 = {}_1A_{0,0}(v_{1,0} + \varepsilon_1\varepsilon_2 H_{1,0} y_2) + {}_1A_{0,1}(v_{1,1} + \varepsilon_2 H_{1,1} y_2) + A_{0,2} y_2,$$
$$\varepsilon_1(\dot v_{1,1} + \varepsilon_2 \dot H_{1,1} y_2 + \varepsilon_2 H_{1,0}\dot y_2) = {}_1A_{0,1}(v_{1,0} + \varepsilon_1\varepsilon_2 H_{1,0} y_2) + {}_1A_{1,1}(v_{1,1} + \varepsilon_1\varepsilon_2 H_{1,1} y_2) + A_{1,2} y_2.$$

Учитывая выражение для $\dot y_2$, получаем

$$\dot v_{1,0} + \varepsilon_1\varepsilon_2 \dot H_{1,0} y_2 + H_{1,0}A_2 y_2 = {}_1A_{0,0}(v_{1,0} + \varepsilon_1\varepsilon_2 H_{1,0} y_2) + {}_1A_{0,1}(v_{1,1} + \varepsilon_2 H_{1,1} y_2) + A_{0,2} y_2 \varepsilon_1\dot v_{1,1} + \varepsilon_1\varepsilon_2 \dot H_{1,1} y_2 + H_{1,0}A_2 y_2)$$
$$= {}_1A_{0,1}(v_{1,0} + \varepsilon_1\varepsilon_2 H_{1,0} y_2) + {}_1A_{1,1}(v_{1,1} + \varepsilon_1\varepsilon_2 H_{1,1} y_2) + A_{1,2} y_2.$$

Предположим, что матрицы $H_{1,0}, H_{1,1}$ удовлетворяют следующим уравнениям

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 \dot H_{1,0} + H_{1,0}A_2 = {}_1A_{0,0}\varepsilon_1\varepsilon_2 H_{1,0} + {}_1A_{0,1}\varepsilon_2 H_{1,1} + A_{0,2}\varepsilon_1\varepsilon_2 \dot H_{1,1} + H_{1,0}A_2 = {}_1A_{0,1}\varepsilon_1\varepsilon_2 H_{1,0} + {}_1A_{1,1}\varepsilon_2 H_{1,1} + A_{1,2}$$

тогда мы получаем независимую подсистему для $v_{1,0}$ и $v_{1,1}$ вида

$$\dot v_{1,0} = {}_1A_{0,0} v_{1,0} + {}_1A_{0,1} v_{1,1},$$
$$\varepsilon_1 \dot v_{1,1} = {}_1A_{1,0} v_{1,0} + {}_1A_{1,1} v_{1,1}.$$

1.3 Третий этап

Аналогично тому, что было сделано на первом этапе, мы вводим новую переменную y_1 по формуле $v_{1,1} = y_1 + L_{1,0} v_{1,0}$ и получаем следующие уравнения

$$\dot v_{1,0} = {}_1A_{0,0} v_{1,0} + {}_1A_{0,1}(y_1 + L_{1,0} v_{1,0}),$$
$$\varepsilon_1(\dot y_1 + \dot L_{1,0} v_{1,0} + L_{1,0}\dot v_{1,0}) = {}_1A_{0,1} v_{1,0} + {}_1A_{1,1}(y_1 + L_{1,0} v_{1,0}).$$

Подставляя выражение для $\dot v_{1,0}$ из первого из этих уравнений во второе, получаем

$$\varepsilon_1 \dot y_1 + \varepsilon_1[\dot L_{1,0} v_{1,0} + L_{1,0}({}_1A_{0,0} v_{1,0} + {}_1A_{0,1}(y_1 + L_{1,0} v_{1,0}))] = {}_1A_{0,1} v_{1,0} + {}_1A_{1,1}(y_1 + L_{2,0} v_{1,0}).$$

Предположим, что матрица $L_{1,0}$ удовлетворяет уравнению $\varepsilon_1 \dot L_{1,0} + \varepsilon_1 L_{1,0}({}_1A_{0,0} + {}_1A_{0,1} L_{1,0}) = {}_1A_{0,1} + {}_1A_{1,1} L_{1,0}$, тогда получим независимое уравнение для y_1 вида $\varepsilon_1 \dot y_1 = ({}_1A_{1,1} - \varepsilon_{11} L_{1,0} A_{0,1}) y_1$. Система

$$\dot v_{1,0} = A_0 v_{1,0} + {}_1A_{0,1} y_1,$$
$$\varepsilon_1 \dot y_1 = A_1 y_1$$

является результатом третьего шага. Здесь $A_0 = {}_1A_{0,0} + {}_1A_{0,1} L_{1,0}$, $A_1 = {}_1A_{1,1} - \varepsilon_{11} L_{1,0} A_{0,1}$.

1.4 Четвертый этап

Чтобы исключить y_1 из уравнения для $v_{1,0}$, необходимо ввести новую переменную y_0 по формуле $v_{1,0} = y_0 + \varepsilon_1 H_{0,0} y_1$. Получаем уравнение $\dot y_0 + \varepsilon_1(\dot H_{0,0} y_1 + H_{0,0}\dot y_1) = A_0(y_0 + \varepsilon_1 H_{0,0} y_1) + {}_1A_{0,1} y_1$ и с учетом выражения для $\dot y_1$ имеем $\dot y_0 + \varepsilon_1 \dot H_{0,0} y_1 + H_{0,0} A_1 = A_0(y_0 + \varepsilon_1 H_{0,0} y_1) + {}_1A_{0,1} y_1$.

Предположим, что матрица $H_{0,0}$ удовлетворяет уравнению $\varepsilon_1 \dot H_{0,0} + H_{0,0} A_1 = A_0 \varepsilon_1 H_{0,0} + {}_1A_{0,1}$, тогда получаем независимое уравнение для y_0 вида $\dot y_0 = A_0 y_0$.

1.5 Итоговое преобразование

Таким образом, исходная дифференциальная система с двумя малыми параметрами приводится к блочно-диагональной форме преобразованием $x = Py$, где $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $P = P_1P_2P_3P_4$, $y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Здесь

$$P_1=\begin{pmatrix} I & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ L_{2,0} & L_{2,1} & I\end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix} I & 0 & \varepsilon_1\varepsilon_2 H_{1,0}\\ 0 & I & \varepsilon_2 H_{1,1}\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix},\ P_3=\begin{pmatrix} I & 0 & 0\\ L_{1,0} & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix},\ P_4=\begin{pmatrix} I & \varepsilon_1 H_{0,0} & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix},$$ I и 0 – единичная и нулевая матрицы соответствующих размеров. После элементарных алгебраических преобразований получаем

$$P=\begin{pmatrix} I & \varepsilon_1 H_{0,0} & \varepsilon_1\varepsilon_2 H_{1,0}\\ L_{1,0} & I+\varepsilon_1 L_{1,0}H_{0,0} & \varepsilon_2 H_{1,1}\\ p_{31} & p_{32} & I+p_{33}\end{pmatrix},$$

где $p_{31}=L_{2,0}+L_{2,1}L_{1,0}$, $p_{32}=\varepsilon_1 L_{2,0}H_{0,0}+L_{2,1}(I+\varepsilon_1 L_{1,0}H_{0,0})$, $p_{33}=\varepsilon_1\varepsilon_2 L_{2,0}H_{1,0}+\varepsilon_2 L_{2,1}H_{1,1}$. Следует отметить, что все эти четыре матрицы обратимы и для них легко получить выражения

$$P_1^{-1}=\begin{pmatrix} I & 0 & 0\\ 0 & I & 0\\ -L_{2,0} & -L_{2,1} & I\end{pmatrix},\ P_2^{-1}=\begin{pmatrix} I & 0 & -\varepsilon_1\varepsilon_2 H_{1,0}\\ 0 & I & -\varepsilon_2 H_{1,1}\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix},\ P_3^{-1}=\begin{pmatrix} I & 0 & 0\\ -L_{1,0} & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix},\ P_4^{-1}=\begin{pmatrix} I & -\varepsilon_1 H_{0,0} & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}.$$

Это означает, что P обратимо, $P^{-1}=P_4^{-1}P_3^{-1}P_2^{-1}P_1^{-1}$ и $\begin{pmatrix} y_0\\ y_1\\ y_2\end{pmatrix}=P_4^{-1}P_3^{-1}P_2^{-1}P_1^{-1}\begin{pmatrix} x_0\\ x_1\\ x_2\end{pmatrix}.$

2 Система с многими параметрами

Вернемся теперь к случаю нескольких параметров. Построение расщепляющего преобразования будет состоять из нескольких последовательных этапов.

2.1 Первый этап

На первом шаге мы вводим новую переменную y_n по формуле $x_n=y_n+\Sigma_{k=0}^{n-1}L_{n,k}x_k$ и получаем следующие дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned}
\dot{x}_0&=\sum_{k=0}^{n-1}A_{0,k}x_k+A_{0,n}\sum_{k=0}^{n-1}L_{n,k}x_k+A_{0,n}y_n,\\
\varepsilon_1\dot{x}_1&=\sum_{k=0}^{n-1}A_{1,k}x_k+A_{1,n}\sum_{k=0}^{n-1}L_{n,k}x_k+A_{1,n}y_n,\\
\varepsilon_1\varepsilon_2\dot{x}_2&=\sum_{k=0}^{n-1}A_{2,k}x_k+A_{2,n}\sum_{k=0}^{n-1}L_{n,k}x_k+A_{2,n}y_n,\\
&\cdots\\
\prod_{k=1}^{n-1}\varepsilon_k\dot{x}_{n-1}&=\sum_{k=0}^{n-1}A_{n-1,k}x_k+A_{n-1,n}\sum_{k=0}^{n-1}L_{n,k}x_k+A_{n-1,n}y_n,
\end{aligned}\tag{4}$$

а также

$$\Big(\prod_{k=1}^{n}\varepsilon_k\Big)\dot{y}_n+\Big(\prod_{k=1}^{n}\varepsilon_k\Big)\sum_{k=0}^{n-1}L_{n,k}\dot{x}_k+\Big(\prod_{k=1}^{n}\varepsilon_k\Big)\sum_{k=0}^{n-1}\dot{L}_{n,k}x_k=\sum_{k=0}^{n-1}A_{n,k}x_k+A_{n,n}\sum_{k=0}^{n-1}L_{n,k}x_k+A_{n,n}y_n.\tag{5}$$

Подставляя выражения для производных из (4) в (5) получаем

$$\Big(\prod_{k=1}^{n}\varepsilon_k\Big)\dot{y}_n+\Big(\prod_{k=1}^{n}\varepsilon_k\Big)\sum_{k=0}^{n-1}\dot{L}_{n,k}x_k+\Big(\prod_{k=1}^{n}\varepsilon_k\Big)L_{n,0}\Big(\sum_{k=0}^{n-1}A_{0,k}x_k+A_{0,n}\sum_{k=0}^{n-1}L_{n,k}x_k+A_{0,n}y_n\Big)+$$
$$\Big(\prod_{k=2}^{n}\varepsilon_k\Big)L_{n,1}\Big(\sum_{k=0}^{n-1}A_{1,k}x_k+A_{1,n}\sum_{k=0}^{n-1}L_{n,k}x_k+A_{1,n}y_n\Big)+\cdots+$$
$$\Big(\prod_{k=n-1}^{n}\varepsilon_k\Big)L_{n,n-1}\Big(\sum_{k=0}^{n-1}A_{n-1,k}x_k+A_{n-1,n}\sum_{k=0}^{n-1}L_{n,k}x_k+A_{n-1,n}y_n\Big)=\sum_{k=0}^{n-1}A_{n,k}x_k+A_{n,n}\sum_{k=0}^{n-1}L_{n,k}x_k+A_{n,n}y_n.$$

Пусть матрицы $L_{n,k}$ удовлетворяют следующим уравнениям

$$\Big(\prod_{k=1}^{n}\varepsilon_k\Big)\dot{L}_{n,0}+\Big(\prod_{k=1}^{n}\varepsilon_k\Big)L_{n,0}(A_{0,0}+A_{0,n}L_{n,0})=A_{n,0}+A_{n,n}L_{n,0},$$

$$\Big(\prod_{k=1}^{n}\varepsilon_k\Big)\dot{L}_{n,1}+\Big(\prod_{k=2}^{n}\varepsilon_k\Big)L_{n,1}(A_{1,0}+A_{1,n}L_{n,0})=A_{n,1}+A_{n,n}L_{n,1},$$

$$\dots$$

$$\Big(\prod_{k=1}^{n}\varepsilon_k\Big)\dot{L}_{n,1}+\varepsilon_n L_{n,n-1}(A_{n-1,0}+A_{n-1,n}L_{n,n-1})=A_{n,n-1}+A_{n,n}L_{n,n-1}.$$

Отсюда следует, что y_n удовлетворяет независимому уравнению $\prod_{k=1}^{n}\varepsilon_k\dot{y}_n=A_n y_n,$ где $A_n=A_{n,n}-\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\prod_{j=k+1}^{n}\varepsilon_j\Big)L_{n,k}A_{k,n}$. Для всех остальных переменных $x_0,x_1,\dots,x_{n-1}$ получаем уравнения

$$\begin{aligned}
\dot{x}_0&=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}A_{0,k}x_k+A_{0,n}y_n,\\
\varepsilon_1\dot{x}_1&=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}A_{1,k}x_k+A_{1,n}y_n\\
\varepsilon_1\varepsilon_2\dot{x}_2&=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}A_{2,k}x_k+A_{2,n}y_n\\
&\dots\\
\prod_{k=1}^{n-1}\varepsilon_k\dot{x}_{n-1}&=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}A_{n-1,k}x_k+A_{n-1,n}y_n.
\end{aligned}\tag{6}$$

2.2 Второй этап

Введем новые переменные $v_{n-1,0},v_{n-1,1},\dots,v_{n-1,n-1}$ по формулам $x_k=v_{n-1,k}+\Big(\prod_{j=k+1}^{n}\varepsilon_j\Big)H_{n-1,k}y_n,\ k=\overline{0,\mathrm{n}-1}$, чтобы исключить переменную y_n из дифференциальных уравнений для $x_0,x_1,\dots,x_{n-1}$. Тогда с учетом соотношений для матриц $H_{n-1,k}$ вида

$$\Big(\prod_{j=k+1}^{n}\varepsilon_j\Big)\dot{H}_{n-1,k}+H_{n-1,k}A_n=\sum_{i=0}^{n-1}{}_{n-1}A_{i,k}\Big(\Pi_{j=k+1}^{n}\varepsilon_j\Big)H_{n-1,k}+A_{k,n},$$

мы получим следующую дифференциальную систему

$$\begin{aligned}
\dot{v}_{n-1,0}&=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}A_{0,k}v_{n-1,k},\\
\varepsilon_1\dot{v}_{n-1,1}&=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}A_{1,k}v_{n-1,k}\\
\varepsilon_1\varepsilon_2\dot{v}_{n-1,2}&=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}A_{2,k}v_{n-1,k}\\
&\dots\\
\prod_{k=1}^{n-1}\varepsilon_k\dot{v}_{n-1,n-1}&=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}A_{n-1,k}v_{n-1,k}.
\end{aligned}\tag{7}$$

Эта дифференциальная система имеет структуру, которая полностью соответствует структуре исходной системы, но содержит на одно уравнение меньше. Следовательно, описанный выше алгоритм может быть применен к ней, чтобы исключить еще одно уравнение и получить следующую систему более низкого порядка вида

$$
\begin{aligned}
\dot{v}_{n-2,0} &= \sum_{k=0}^{n-2} {}_{n-2}A_{0,k} v_{n-2,k}, \\
\varepsilon_1 \dot{v}_{n-2,1} &= \sum_{k=0}^{n-2} {}_{n-2}A_{1,k} v_{n-2,k} \\
\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dot{v}_{n-2,2} &= \sum_{k=0}^{n-2} {}_{n-2}A_{2,k} v_{n-2,k} \\
&\dots \\
\prod_{k=1}^{n-2} \varepsilon_k \dot{v}_{n-2,n-2} &= \sum_{k=0}^{n-2} {}_{n-2}A_{n-2,k} v_{n-2,k},
\end{aligned}
\tag{8}
$$

и так далее. Таким образом, последовательно сокращая количество уравнений, можно привести исходную систему к требуемой блочно-диагональной форме вида (2).

3 Основные предположения и возможные приложения

3.1 Ключевые предположения

В абсолютном большинстве известных нам работ предполагается, что матрицы $A_{j,k}$, $j,k = \overline{0,n}$ постоянны, а собственные значения матриц A_k, $k = \overline{1,n}$ при $\varepsilon_k = 0, k = \overline{0,n}$ лежат в левой комплексной полуплоскости. Это предположение гарантирует существование расщепляющего преобразования и позволяет свести решение многих задач устойчивости к исследованию подсистемы $\dot{y}_0 = A_0 y_0$. Подчеркнём, что такое предположение не является обязательным для гарантирования существования преобразования расщепления. Достаточно предположить, что матрицы A_k, $k = \overline{1,n}$, при $\varepsilon_k = 0, k = \overline{0,n}$ обратимы и, в силу теоремы о неявной функции, это будет гарантировать как существование расщепляющего преобразования и его обратимость, так и возможность вычисления всех матриц в виде асимптотических разложений по степеням малых параметров. Понятно, что если эти матрицы зависят от других параметров, например, как в случае исследования робастной устойчивости, то такие предположения должны выполняться для всех значений дополнительных параметров из заданной области.

Переходя к случаю нестационарных систем, отметим, что предположения зависят от рассматриваемых задач. Итак, при решении задач устойчивости следует формулировать предположения для бесконечного интервала времени, а при решении начальных задач достаточно требовать выполнения соответствующих условий на конечных интервалах времени. Для построения формальных асимптотических разложений по степеням малых параметров элементов преобразования P достаточно предположить, что все матричные функции $A_{j,k}$ непрерывны и ограничены по норме вместе с их частными производными по всем переменным для достаточно малых значений всех малых параметров и t из соответствующего конечного или бесконечного интервала. Однако для обоснования существования преобразования расщепления требуется дополнительно принять условия типа экспоненциальной дихотомии [15], что связано с теорией интегральных многообразий дифференциальных систем с сингулярными возмущениями, которая используется для обоснования применимости этого метода, см., например, [11], [16]-[18] и ссылки на цитируемую литературу в них.

3.2 Проблема робастной устойчивости

Очевидно, что проблема устойчивости исходной системы эквивалентна проблеме устойчивости системы (2), если преобразование P найдено точно. Обычно при изучении прикладных задач достаточно найти конечное число слагаемых в разложении элементов P по степеням малых параметров.

Более сложной является проблема изучения робастной устойчивости системы (1) (см., например, [19], [20] и ссылки в ней). Однако возможность сведения этой проблемы к анализу конечного числа подсистем меньшей размерности существенно упрощает ситуацию.

3.3 Расщепление начальных задач

Теперь ясно, что полученное преобразование $x = Py$, сводящее исходную систему (1) к (2), может быть представлено как композиция из $2n$ матриц, каждая из которых обратима и имеет довольно простую структуру $P = P_1 P_2 \cdots P_{2n-1} P_{2n}$.

Предположим, для (1) есть начальные условия $x(t_0) = \kappa,\ \kappa = colon(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2)$. Тогда для (2) получаем начальные условия $y(t_0) = \gamma = P^{-1}\kappa.$ Это означает, что для каждой независимой подсистемы у нас есть независимое начальное условие, т.е. начальная задача для исходной системы (1) сводится к трем независимым начальным задачам.

Итак, для случая двух параметров получаем три независимые подсистемы с независимыми начальными условиями

$$\dot{y}_0 = A_0 y_0, \quad y_0(t_0) = \gamma_0;$$
$$\varepsilon_1 \dot{y}_1 = A_1 y_1, \quad y_1(t_0) = \gamma_1;$$
$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dot{y}_2 = A_2 y_2, \quad y_2(t_0) = \gamma_2.$$

Использование представления $P^{-1} = P_4^{-1} P_3^{-1} P_2^{-1} P_1^{-1}$ формы

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} I + q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & I + q_{22} & q_{23} \\ -L_{2,0} & -L_{2,1} & I \end{pmatrix},$$

Где

$$q_{11} = (I + \varepsilon_1 H_{0,0} L_{1,0}) \varepsilon_1 \varepsilon_2 H_{1,0} L_{2,0} + \varepsilon_1 H_{0,0} L_{1,0} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 H_{0,0} H_{1,1} L_{2,0},$$
$$q_{12} = (I + \varepsilon_1 H_{0,0} L_{1,0}) \varepsilon_1 \varepsilon_2 H_{1,0} L_{2,1} - \varepsilon_1 H_{0,0} (I + \varepsilon_2 H_{1,1} L_{2,1}),$$
$$q_{13} = -(I + \varepsilon_1 H_{0,0} L_{1,0}) \varepsilon_1 \varepsilon_2 H_{1,0} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 H_{0,0} H_{1,1},$$
$$q_{21} = -L_{1,0} (I + \varepsilon_1 \varepsilon_2 H_{1,0} L_{2,0}) + \varepsilon_2 H_{1,1} L_{2,0},$$
$$q_{22} = \varepsilon_2 H_{1,1} L_{2,1} - \varepsilon_1 \varepsilon_2 L_{1,0} H_{1,0} L_{2,1},$$
$$q_{23} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 L_{1,0} H_{1,0} - \varepsilon_2 H_{1,1},$$

мы получаем

$$\gamma_0 = (I + q_{11}) \kappa_0 + q_{12} \kappa_1 + q_{13} \kappa_2;$$
$$\gamma_1 = q_{21} \kappa_0 + (I + q_{22}) \kappa_1 + q_{23} \kappa_2;$$
$$\gamma_2 = -L_{2,0} \kappa_0 - L_{2,1} \kappa_1 + \kappa_2.$$

3.4 Проблема стабилизации

Рассмотрим систему управления

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= \sum_{k=0}^{n} A_{0,k} x_k + B_0 u, \\ \varepsilon_1 \dot{x}_1 &= \sum_{k=0}^{n} A_{1,k} x_k + B_1 u, \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dot{x}_2 &= \sum_{k=0}^{n} A_{2,k} x_k + B_2 u, \\ &\cdots \\ \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k \dot{x}_n &= \sum_{k=0}^{n} A_{n,k} x_k + B_n u. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $x_k \in R^{m_k},\ k = \overline{0,n},\ t \in R,\ \varepsilon_k$ – положительные малые параметры $\varepsilon_k \in (0, \varepsilon_k^{(0)}],\ k = \overline{1,n},\ \varepsilon_0 = 1$.

Наша цель – построить преобразование расщепления, которое приводит систему (1) к блочно-диагональной форме

$$\begin{aligned}
\dot{y}_0 &= A_0 y_0 + \tilde{B}_0 u,\\
\varepsilon_1 \dot{y}_1 &= A_1 y_1 + \tilde{B}_1 u,\\
\varepsilon_2 \varepsilon_2 \dot{y}_2 &= A_2 y_2 + \tilde{B}_2 u,\\
&\dots\\
\prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k \dot{y}_n &= A_n y_n + \tilde{B}_n u.
\end{aligned} \tag{10}$$

Приведем вид матриц $\tilde{B}_0, \tilde{B}_1$ и $\tilde{B}_2$ для случая двух параметров

$$\tilde{B}_0 = (I + q_{11})B_0 + q_{12}B_1 + q_{13}B_2;$$

$$\tilde{B}_1 = q_{21}B_0 + (I + q_{22})B_1 + q_{23}B_2;$$

$$\tilde{B}_2 = -L_{2,0}B_0 - L_{2,1}B_1 + B_2.$$

Таким образом, проблема стабилизации системы (9) сводится к задаче стабилизации системы (10), неуправляемая часть которой имеет блочно-диагональный вид. Последнюю задачу можно рассматривать как разновидность задачи одновременной стабилизации, которую можно сформулировать как вопрос о существовании обратной связи $u = Ky$, стабилизирующей все подсистемы системы (10) (см., например, [19], [21]-[23] и ссылки в них). Как известно, задачи такого типа в общем случае относятся к категории нерешенных задач даже для стационарных систем. Однако в случае систем с множеством временных масштабов очень часто самые быстрые переменные описывают затухающие переходные процессы. Это означает, что размер рассматриваемой задачи существенно уменьшается, что значительно упрощает ее решение.

Заключение

В докладе исследуется существование и возможность приближенного построения преобразования расщепления для линейных систем с несколькими малыми множителями при производных. Цель преобразования – преодоление трудностей, вызванных большой размерностью задач, возникающих при эволюции крупномасштабных систем. Метод доказательства существования и построения преобразования нестационарных систем может быть применен к широкому классу прикладных задач. Соответствующие численные и теоретические результаты планируется получить в ближайшее время.

Литература

1. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Математический сборник. 1952. Т. 31. №. 3. С. 575-586.

2. *Васильева А.Б., Дмитриев М. Г.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. 1982. Т. 20. С. 3-77.

3. *Дмитриев М.Г., Курина Г. А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // Автомат. и телемех. 2006. № 1. С. 3-51.

4. *Abed E. H.* Multiparameter singular perturbation problems: Iterative expansions and asymptotic stability // System and Control Lett. 1985. Vol. 5. P. 279-282.

5. *Abed E. H.* Decomposition and stability of multiparameter singular perturbation problems // IEEE Automat. Contr. 1986. Vol. 31(10). P. 925-933.

6. *Khalil H.K., Kokotovic P.V.* Control of Linear Systems with Multiparameter Singular Perturbations // Automatica. 1979. Vol. 15, Iss. 2. P. 197-207.

7Zhang Y., Naidu D.S., Cai C.X., Zou Y. Singular perturbations and time scales in control theories and applications: an overview 2002-2012 // Int. J. Inf. Syst. Sci. 2014. Vol. 9(1). P. 1-36.

8. *Ladde G.S., Siljak D.D.* Multiparameter Singular Perturbations of Linear Systems with Multiple Time Scales // Automatica. 1983. Vol. 19(4). P. 385-394.

9. *Барис Я.С., Фодчук В. И.* Исследование ограниченных решений линейных нерегулярно возмущенных дифференциальных систем методом интегральных многообразий // Украинский математический журнал. 1969. Т. 21. № 3. С. 291-304.

10. *Sobolev V.A.* Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems // System and Control Letters. 1984. Vol. 5. P. 169-179.

11. *Sobolev V.A.* Decomposition of linear singularly perturbed systems // Acta Mathematica Hungarica. 1987. Vol.

49(3). P. 365-376.
12. Mukaidani H., Xu H., Mizukami K. New Results for near-optimal control of linear multiparameter singularly perturbed systems // Automatica. 2003. Vol. 39. P. 2157-2167.
13. Chang K.W. Singular perturbations of a general boundary value problem // SIAM J. Math. Anal. 1972. Vol. 3. P. 520-526.
14. Kokotovic P.V. A Riccati equation for block diaganalization of ill-conditioned systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. Vol. 20. P. 812-814.
15. Wilde R.R., Kokotovic P.V. A dichotomy in linear control theory // IEEE Trans. Automat. Control. 1972. Vol. 17. P. 382-383.
16. Mortell M.P., O'Malley R., Pokrovskii A., Sobolev V. Singular Perturbations and Hysteresis. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
17. Shchepakina E., Sobolev V., Mortell M.P. Singular Perturbations. Introduction to System Order Reduction Methods with Applications / Lect. Notes in Math. Springer Int. Publ. 2014.
18. Воропаева Н.В., Соболев В.А. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. М.: Физматлит, 2009. 255 с.
19. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
20. Dragan V., Morozan T., Stoica A.M. Mathematical Methods in Robust Control of Linear Stochastic Systems. New York: Springer, 2013.
21. Blondel V. Simultaneous Stabilization of Linear Systems. London: Springer-Verlag, 1994.
22. Коровин С.К., Кудрицкий А.В., Фурсов А.С. О некоторых подходах к одновременной стабилизации линейных объектов регулятором заданной структуры // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. №. 4. С. 597-608.
23. Емельянов С.В., Фомичев В.В., Фурсов А.С. Одновременная стабилизация линейных динамических объектов регулятором переменной структуры // Автоматика и телемеханика. 2012. №. 7. С. 15-24.