

# ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СЛЕЖЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ ДВУХКОЛЕСНОГО РОБОТА, ОСНОВАННОЕ НА ТЕХНИКЕ SDDRE<sup>38</sup>

Макаров Д.А.

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,  
Россия, г. Москва, Вавилова, 44, корп. 2.

makarov@isa.ru

*Аннотация:* В статье рассматривается задача реализации заданной траектории движения для нелинейной модели двухколесной робототехнической системы. Каждое из двух колес обладает независимым управлением. Приближенное решение задачи получается на основе модификации известного эвристического подхода, основанного на технике SDDRE. Достоинством полученного решения является его вычислительная эффективность. Проведенные численные эксперименты показали, что качество полученного управления незначительно уступает качеству управления, полученного с помощью обычного SDDRE.

Ключевые слова: задача слежения, двухколесная система управления, линеаризация обратной связью, техника SDDRE.

## Введение

На данный момент существует множество методов управления нелинейными системами. Среди них можно отметить бекстеппинг [1], линеаризацию обратной связью [2], управление с прогнозирующими моделями [3], методы, основанные на дифференциальной плоскостности [4,5] и др. Общей характеристикой таких методов, как правило, является применимость к особому классу допустимых систем.

Одним из перспективных подходов построения нелинейной обратной связи является техника SDRE (см. обзоры [6-8] и цитируемую литературу в них). Основная идея этого подхода состоит в представлении исходной нелинейной системы в псевдолинейном виде, в котором матрицы в правой части являются функциями от состояния. Далее вводится квадратичный критерий качества, элементы матриц которого также могут быть функциями состояния, и используется обратная связь, по форме совпадающая с управлением в линейно-квадратичной задаче оптимального управления. Отличием в данном случае является то, что управление находится на основе решения матричного алгебраического уравнения Риккати с зависящими от состояния коэффициентами (State-Dependent Riccati Equation – SDRE), что и дало название этой технике. Несмотря на эвристический характер такого подхода, он получил достаточно широкое применение (см. обзор [6]). Для решения задач на конечном интервале времени, например, задач слежения, применяется модификация подхода, использующая матричное дифференциальное уравнение Риккати с зависящими от состояния коэффициентами (State-Dependent Differential Riccati Equation – SDDRE) [9,10].

Достоинством SDRE и SDDRE является применимость к довольно широкому классу нелинейных систем, некоторая субоптимальность (на данный момент, строгие оценки в общем случае не известны автору) и простота реализации. Существенным недостатком является необходимость решения SDRE или SDDRE для каждого нового состояния системы, что может наталкиваться на вычислительные сложности в случае для систем с быстрой динамикой, большой размерности и т.д.

Для преодоления этого недостатка в [11] на основе асимптотического разложения был продолжен модифицированный SDRE подход. В нем с помощью введения искусственного малого параметра удалось получить численно-аналитический алгоритм, существенно снижающий вычислительную сложность обычного SDRE подхода. Метод был распространён на задачи слежения в разных постановках [12-14].

В настоящей работе с помощью численных экспериментов для модели двухколесной робототехнической системы исследуется эффективность приближенного решения задачи управления, найденного на основе подхода из [14], как наиболее близкого из к рассматриваемой задаче из постановок [12-14]. В качестве базового метода решения задачи слежения используется метод из [15], первый этап которого состоит в замене координат исходной системы, а второй – в применении техники SDDRE. Первый этап остается без изменений, тогда как на втором мы будем использовать, как SDDRE, так и его модификацию [14]. В качестве показателей эффективности рассматривается время моделирования системы и значения квадратичного критерия, используемого при синтезе обоих управлений.

<sup>38</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00202, <https://rscf.ru/project/21-11-00202/>

## 1 Постановка задачи

Схема двухколёсной системы, для которой решается задача слежения на плоскости, представлена на Рис. 1 [15], где  $XOY$  – земная декартова система координат,  $x_c, y_c$  – координаты центра масс робота,  $d$  – расстояние от центра масс до оси колёс,  $\varphi$  – угол между продольной осью робота и осью  $OX$  (угол рысканья),  $r$  – радиус колёс, параметр  $w_s$  будет описан ниже,  $b$  – половина ширины робота.

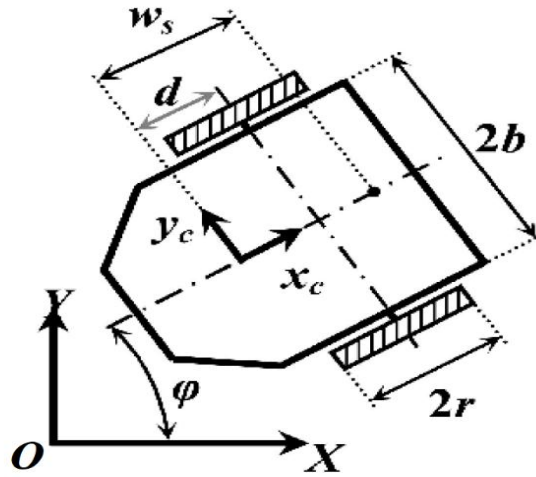


Рис. 1. Схема двухколёсной тележки

Модель динамики робота имеет вид [15]

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = + \begin{bmatrix} Sv \\ (S^T MS)^{-1} (-S^T M \dot{S} v - S^T c) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2} \\ (S^T MS)^{-1} \end{bmatrix} \tau, \quad (1)$$

где  $x$  – вектор состояния системы,  $q = [x_c \ y_c \ \theta_l \ \theta_r]^T$ ,  $v = [\dot{\theta}_l \ \dot{\theta}_r]^T$ ,  $\theta_l$  и  $\theta_r$  – углы поворота левого и правого колёс,  $\tau = [\tau_l \ \tau_r]^T$  – управление,  $\tau_l$  и  $\tau_r$  – моменты сил левого и правого колёс, точка означает дифференцирование по времени,  $0_{4 \times 2}$  – нулевая матрица соответствующей размерности. Матрицы  $S$  и  $M$  задаются как

$$S = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos(\varphi) & \frac{r}{2} \cos(\varphi) \\ \frac{r}{2} \sin(\varphi) & \frac{r}{2} \sin(\varphi) \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m_b + 2m_w & 0 & -\frac{m_w r d \sin(\varphi)}{b} & \frac{m_w r d \sin(\varphi)}{b} \\ 0 & m_b + 2m_w & \frac{m_w r d \cos(\varphi)}{b} & -\frac{m_w r d \cos(\varphi)}{b} \\ -\frac{m_w r d \sin(\varphi)}{b} & \frac{m_w r d \cos(\varphi)}{b} & m_{3,3} & m_{3,4} \\ \frac{m_w r d \sin(\varphi)}{b} & -\frac{m_w r d \cos(\varphi)}{b} & m_{3,4} & m_{4,4} \end{bmatrix},$$

где

$$m_{3,3} = \frac{r^2 (2m_w (b^2 + d^2) + I_{zzb} + 2I_{zzw})}{4b^2} + I_{yyw}, \quad m_{3,4} = \frac{-r^2 (2m_w (b^2 + d^2) + I_{zzb} + 2I_{zzw})}{4b^2},$$

$$m_{4,4} = \frac{r^2 (2m_w (b^2 + d^2) + I_{zzb} + 2I_{zzw})}{4b^2} + I_{yyw}.$$

Здесь  $m_w$  – масса колёса,  $m_b$  – масса колёсной системы,  $I_{zzb}$  – момент инерции колёсной системы относительно вертикальной оси  $OZ$ ,  $I_{yyw}$  – момент инерции колёс относительно оси вращения,  $I_{zzw}$  – момент инерции колёс относительно вертикальной оси  $OZ$ . Угол рысканья робота определяется как  $\varphi = r(\theta_r - \theta_l) / (2b)$ .

Задача ставится следующим образом, необходимо найти синтезирующее управление  $\tau$ , которое обеспечивает минимизацию нормы ошибки слежения  $\|e\|$ ,  $e = [x_c \ y_c]^T - [x_r \ y_r]^T$ , где  $x_r(t), y_r(t)$  – заданные желаемые (референсные) траектории для координат  $x_c$  и  $y_c$  соответственно.

## 2 Управление на основе SDDRE

Для начала приведем исходный способ решения из [15]. Он состоит из двух этапов. Сначала вводится замена переменных, затем с помощью техники SDDRE из [9, 10] решается задача перевода системы в новых переменных из начального состояния в заданное.

### 2.1 Замена переменных

Замена переменных основывается на методе линеаризации обратной связью, который описан в [16]. Вводится искусственный выход системы

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c + w_s \cos(\varphi) \\ y_c + w_s \sin(\varphi) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

В выходе (2) искусственно введенный параметр  $w_s > 0$  определяет расстояние (см. Рис. 1.) от центра масс робота до некоторой референсной подвижной точки в  $XOY$ , в которую выбранное в дальнейшем управление будет приводить робота. Дважды продифференцировав по времени (2), после некоторых преобразований получаем новую систему

$$\dot{z} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \alpha(S^T MS)^{-1} (-S^T M \dot{S} v - S^T c) + \beta + \alpha(S^T MS)^{-1} \tau \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где  $z = [y \ \dot{y}]$ , матрицы  $\alpha, \beta$  задаются как

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{bmatrix}, \quad \beta = \bar{\beta} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \end{bmatrix}, \quad c = \bar{c} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_r \\ \dot{\theta}_l \end{bmatrix}, \quad \bar{\beta} = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_{1,1} & \bar{\beta}_{1,2} \\ \bar{\beta}_{2,1} & \bar{\beta}_{2,2} \end{bmatrix},$$

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} \frac{m_w r^2 d(\dot{\theta}_r - 2\dot{\theta}_l) \cos(\varphi)}{2b^2} & \frac{m_w r^2 d \dot{\theta}_l \cos(\varphi)}{2b^2} \\ -\frac{m_w r^2 d \dot{\theta}_r \sin(\varphi)}{2b^2} & -\frac{m_w r^2 d(\dot{\theta}_l - 2\dot{\theta}_r) \sin(\varphi)}{2b^2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$\alpha_{1,1} = \frac{r(b \cos(\varphi) - w_s \sin(\varphi))}{2b}, \quad \alpha_{1,2} = \frac{r(b \cos(\varphi) + w_s \sin(\varphi))}{2b},$$

$$\alpha_{2,1} = \frac{r(b \sin(\varphi) + w_s \cos(\varphi))}{2b}, \quad \alpha_{2,2} = \frac{r(b \sin(\varphi) - w_s \cos(\varphi))}{2b},$$

$$\bar{\beta}_{1,1} = -\frac{r^2(\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l) \sin(\varphi)}{4b} + \frac{r^2 w_s (\dot{\theta}_l - \dot{\theta}_r) \cos(\varphi)}{4b^2}, \quad \bar{\beta}_{1,2} = \frac{r^2(\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l) \sin(\varphi)}{4b} - \frac{r^2 w_s (\dot{\theta}_l - \dot{\theta}_r) \cos(\varphi)}{4b^2},$$

$$\bar{\beta}_{2,1} = \frac{r^2(\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l) \cos(\varphi)}{4b} + \frac{r^2 w_s (\dot{\theta}_l - \dot{\theta}_r) \sin(\varphi)}{4b^2}, \quad \bar{\beta}_{2,2} = -\frac{r^2(\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_l) \cos(\varphi)}{4b} - \frac{r^2 w_s (\dot{\theta}_l - \dot{\theta}_r) \sin(\varphi)}{4b^2}.$$

### 2.2 Алгоритм SDDRE

Пусть задана нелинейная система вида

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x(0) = x^0 \quad (4)$$

Где  $x \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния,  $u \in \mathbb{R}^m$  – управление,  $f$  и  $g$  – кусочно-непрерывные гладкие вектор-функции, удовлетворяющие условию Липшица,  $f(0) = 0$ . Необходимо перевести систему (4) из  $x^0$  в 0.

Система (4) может быть представлена в виде

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u, \quad (5)$$

с помощью обозначения  $B(x) = g(x)$  и факторизации  $f(x) = A(x)x$ . Причем при  $n > 1$  существует бесчисленно число способов факторизации  $f(x) = A(x)x$  [7].

Управление, полученное с помощью техники SDDRE, находится как приближенное решение задачи оптимального управления

$$I(u) = \frac{1}{2} x^T(t_f) F x(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^T Q(x) x + u^T R(x) u) dt \rightarrow \min_u \quad (6)$$

для системы (5). В данном функционале  $F$ ,  $Q(x)$  и  $R(x)$  – положительно определенные весовые матрицы (для двух последних матриц это условие должно выполняться для каждого значения  $x$  из допустимой области). Кроме того, предположим, что тройка матриц  $(A(x), B(x), H(x))$ , где  $H(x)^T H(x) = Q(x)$ , управляема и стабилизируема при каждом допустимом значении  $x$ .

Согласно технике SDDRE [9, 10] управление имеет вид

$$u(x, t) = -R^{-1}(x) B^T(x) P(x, t) x, \quad (7)$$

где  $P$  определяется как решение матричного дифференциального уравнения Риккати с зависящими от состояния коэффициентами (State-Dependent Differential Riccati Equation – SDDRE), что и дало название этой технике

$$-\dot{P}(x, t) = P(x, t) A(x) + A^T(x) P(x, t) - P(x, t) B(x) R^{-1}(x) B^T(x) P(x, t) + Q(x), \quad (8)$$

Для приближённого решения (8) для каждого нового значения вектора состояния  $x$  последовательно повторяются следующие шаги.

Шаг 1. Находится отрицательно определенное решение  $P_{ss}^-(x)$  матричного алгебраического уравнения Риккати  $0 = P_{ss}^-(x) A(x) + A^T(x) P_{ss}^-(x) - P_{ss}^-(x) B(x) R^{-1}(x) B^T(x) P_{ss}^-(x) + Q(x)$ .

Шаг 2. Вычислить  $A_{cl}(x) = A(x) - B(x) R^{-1}(x) B^T(x) P_{ss}^-(x)$ .  $A_{cl}(x) = A(x) - B(x) R^{-1}(x) B^T(x) P_{ss}^-(x)$ .

Шаг 3. Найти решение  $D$  алгебраического уравнения Ляпунова  $D(x) A_{cl}^T(x) + A_{cl}(x) D(x) - B(x) R^{-1}(x) B^T(x) = 0$ .

Шаг 4. Найти решение дифференциального уравнения Ляпунова  $\dot{K}(x, t) = K(x, t) A_{cl}^T(x) + A_{cl}(x) K(x, t) - B(x) R^{-1}(x) B^T(x)$  по формуле  $K(x, t) = e^{A_{cl}(t-t_f)} (K(x, t_f) - D(x)) e^{A_{cl}^T(t-t_f)} + D(x)$ ,  $K(x, t_f) = (F - P_{ss}^-(x))^{-1}$ .

Шаг 5. Вычислить  $P(x, t) = K^{-1}(x, t) + P_{ss}^-(x)$ .

Шаг 6. Найти управление с помощью (7).

Для применения изложенного алгоритма, представим (3) в виде (5) с помощью следующих матриц

$$A(z) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \alpha (S^T M S)^{-1} (-S^T M \dot{S} - S^T \bar{C}) + \bar{\beta} \end{bmatrix}, \quad B(z) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ \alpha (S^T M S)^{-1} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где  $I_{2 \times 2}$  – единичная матрица соответствующей размерности. Тогда итоговое управление для системы (1) принимает вид

$$u(x, t) = -R^{-1}(z) B^T(z) P(z, t) z = -R^{-1}(z) B^T(z) P(z, t) [y \quad \dot{y}]^T. \quad (10)$$

### 3 Модификация алгоритма SDDRE

Кратко изложим модификацию алгоритма SDDRE [16]. Она заключается в приближенном решении уравнения (8) с помощью следующей численно-аналитической процедуры.

Шаг 1. Вычислить матрицы

$$A_0 = A(z)|_{z=0}, B_0 = B(z)|_{z=0}, Q_0 = Q(z)|_{z=0}, A_1(z) = \frac{A(z) - A_0}{\varepsilon}, B_1(z) = \frac{B(z) - B_0}{\varepsilon}, Q_1(z) = \frac{Q(z) - Q_0}{\varepsilon}.$$

Здесь  $\varepsilon > 0$  является параметром алгоритма. Весовая матрица  $R$  предполагается постоянной. Предполагается, что пара матриц  $(A_0, B_0)$  управляема.

Шаг 2. Вычисляется  $P_0$  как положительно определенное решение уравнения

$$P_0 A_0 + A_0^T P_0 - P_0 B_0 R_0^{-1} B_0^T P_0 + Q_0 = 0.$$

Шаг 3. Найти  $P_1(z, t)$  с помощью

$$P_1(z, t) = e^{A_{Pcl,0}^T(t_f-t)} M_P e^{A_{Pcl,0}(t_f-t)} + \int_0^\infty e^{A_{Pcl,0}^T \sigma} D_P(z) e^{A_{Pcl,0} \sigma} d\sigma, \quad (11)$$

где  $D_P(z) = P_0(A_1 - B_1 R^{-1} B_0^T P_0) + (A_1 - B_1 R^{-1} B_0^T P_0)^T P_0 + Q_1$ ,  $A_{Pcl,0} = A_0 - B_0 R^{-1} B_0^T P_0$ , а  $M_P$  находится как

$$M_P = \frac{1}{\varepsilon} (F - P_0) - \int_0^\infty e^{A_{Pcl,0}^T \sigma} D_P(z(t_f)) \Big|_{z(t_f)=z(t)} e^{A_{Pcl,0} \sigma} d\sigma.$$

Шаг 3. Вычислить управление (10), где  $P(z, t) = P_0 + \varepsilon P_1(z, t)$ .

Отметим, что предложенная модификация алгоритма отличается от алгоритма [9,10], вычислительной эффективностью: матрица  $P_0$  находится лишь один раз, и в процессе работы необходимо лишь найти  $P_1(z, t)$  с помощью аналитического выражения (11) и сложить с  $P_0$ , чтобы получить  $P(z, t)$  (Шаг 3). Алгоритм из [9, 10] требует выполнения ресурсоёмких операций на каждом шаге своей работы, основными из которых являются решение алгебраических матричных уравнений Риккати и Ляпунова, обращение матрицы и др.). Однако в силу того, что алгоритм [14] изначально разрабатывался для слабо нелинейных систем, естественно ожидать, что его точность решения для систем общего вида будет ниже, чем точность решения алгоритма [9, 10]. Для сравнения качества этих решений этих подходов проведены численные эксперименты.

#### 4 Численные эксперименты

Решим набор задач слежения для модели двухколёсной системы (1) с помощью двух приведённых выше подходов и сравним качество полученных решений. Обозначим управления из разделов 2 и 3 как  $u_1$  и  $u_2$  соответственно. Для их синтеза определим весовые матрицы критерия (5) как

$$F = Q_0 = \text{diag} \{100, 100, 10, 10\}, \quad Q_1 = 0_{4 \times 4}, \quad R_0 = I_{2 \times 2}, \quad R_1 = 0_{2 \times 2}.$$

Параметры системы (5), используемые в экспериментах, представлены в Таблице 1.

Таблица 1. Параметры колесной системы

Параметр	Значение	Единицы измерения
d	0	м
r	0.08	м
b	0.145	м
m <sub>b</sub>	6	м
m <sub>w</sub>	0.32	м
I <sub>zzb</sub>	0.06363	кг*м <sup>2</sup>
I <sub>yyw</sub>	0.6e-4	кг*м <sup>2</sup>
I <sub>zzw</sub>	0.81e-3	кг*м <sup>2</sup>
w <sub>s</sub>	0.1	м

В качестве референсных траекторий определим решения следующих уравнений

$$x_r = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right), y_r = \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right), \quad t \in [0, 4], \quad (12)$$

$$x_r = 3t, y_r = \sin(0.75\pi t), \quad t \in [0, 20/3], \quad (13)$$

$$x_r = 3t, y_r = 3t \sin(3t), \quad t \in [0, 20]. \quad (14)$$

Графически представленные траектории приведены на Рис. 2.

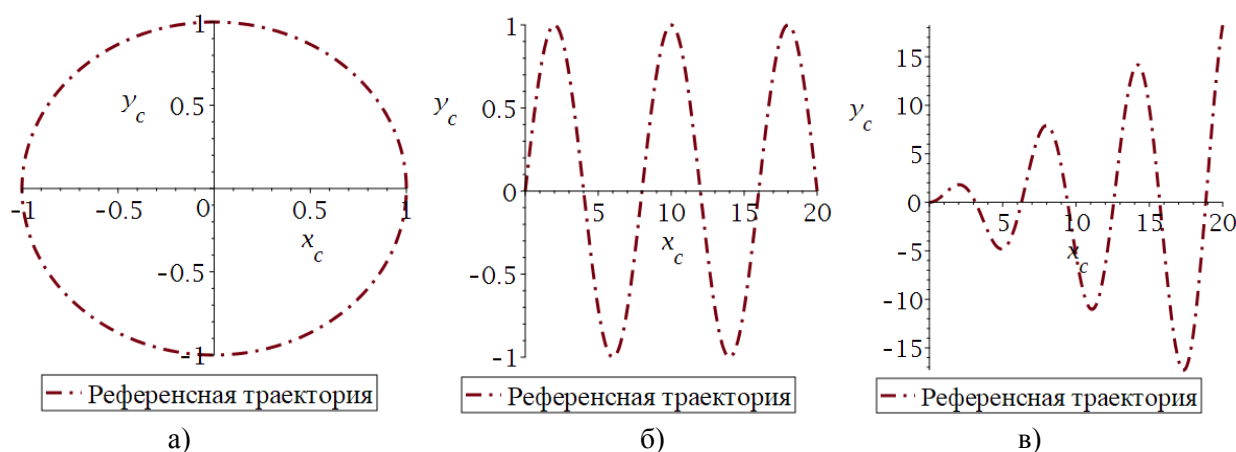


Рис. 2. Графики для уравнений (12)- (14)

Кроме того, в качестве желаемой траектории будем рассматривать уравнения неподвижной точки вида

$$x_r = x_r^0, y_r = y_r^0, \quad t \in [0, 4]. \quad (15)$$

В данном сценарии роботу необходимо приехать из заданной начальной точки на плоскости в точку  $(x_r^0, y_r^0)$  за 4 секунды. В Таблице 2 для различных сценариев, заданных начальным положением системы и референсной траекторией, приводятся значения критерия (5) для двух построенных управлений, символом  $T(w)$  обозначено время, затраченное для численных расчетов для замкнутой системы с управлением  $w$ ,  $\Delta J$  показывает, насколько в процентах  $J(u_2)$  отличается от  $J(u_1)$ , а  $\%T$  показывает, какой процент  $T(u_2)$  составляет от  $T(u_1)$ . Во всех сценариях робот неподвижен в начальный момент времени и ориентирован вдоль оси  $OX$ , т.е.  $\theta_r(0) = \theta_l(0) = \dot{\theta}_r(0) = \dot{\theta}_l(0) = 0$ .

Таблица 2. Результаты численного моделирования

№	Референс. траектория	Начальное положение		$J(u_1)$	$J(u_2)$	$T(u_1)$	$T(u_2)$	$\Delta J$	$\%T$
		$x_c(0)$	$y_c(0)$						
1	(12)	0	0	3.08	3.165	37.25	2.047	2.69	5.50
2		1	0	2.651	2.869	39.45	2.156	7.60	5.47
3		0	-1	12.21	13.96	43.94	2.516	12.54	5.73
4		-1	-1	18.17	19.96	45.06	2.11	8.97	4.68
5	(13)	0	0	8.98	9.815	65.39	2.984	8.51	4.56
6		0	-1	21.58	25.25	64.03	3.344	14.53	5.22
7		0	1	5.009	4.984	67.44	3.125	-0.50	4.63
8	(14)	0	0	101	95.36	157.6	14.34	-5.91	9.10
9		0	-1	105.2	100.1	193.6	14.39	-5.09	7.43
10		0	1	104.2	99.1	188.7	9.36	-5.15	4.96
11		$x_r=-1, y_r=0.5$	1	0	35.8	49.75	37.62	1.469	28.04
12	$x_r=1, y_r=1$	-1	-1	23.33	25.94	44.56	1.313	10.06	2.95
13	$x_r=-1, y_r=-1$	-1	1	18.42	21.21	33.92	1.047	13.15	3.09
Среднее значение								6.87	5.17

Как видно, средний проигрыш модифицированного SDDRE управления по критерию (5) не превышает 7%. Наиболее удачными для  $u_2$  оказались сценарии 8-10, в которых удалось улучшить результаты  $u_1$  в среднем на 5.4%. Это является возможным, поскольку  $u_1$  не является оптимальным управлением. Сценарии 8-10 характеризуются частыми поворотами референсной траектории и возрастанием линейной скорости. На Рис. 3 представлены траектории замкнутых систем и нормы ошибок слежения  $e$  для двух построенных управлений в сценарии 8. Как видно,  $u_2$  обеспечивает в этом случае меньшую ошибку слежения.

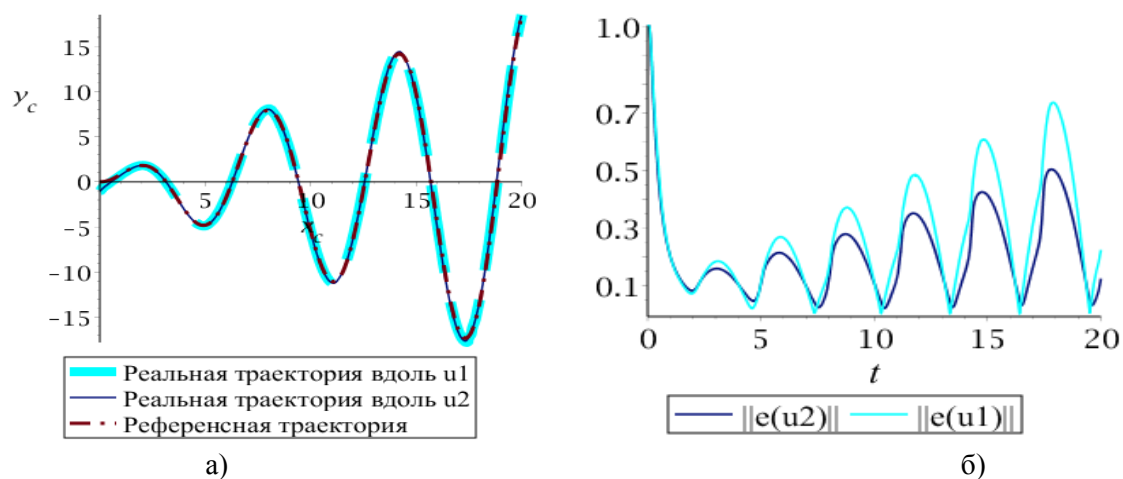


Рис. 3. Траектории и нормы ошибок слежения для сценария 8

Самым неудачным для  $u_2$  оказался сценарий 11, в котором проигрыш по критерию качества оказался примерно в 4 раза больше среднего проигрыша. В этом случае для достижения конечной точки робот осуществляет разворот с помощью движения назад (см. Рис. 4 а)). Ошибки слежения для этих двух управлений практически идентичны (см. Рис. 4 б)), и проигрыш по функционалу обусловлен повышенным расходом управления при обратной связи  $u_2$  (см. см. Рис. 5 а)).

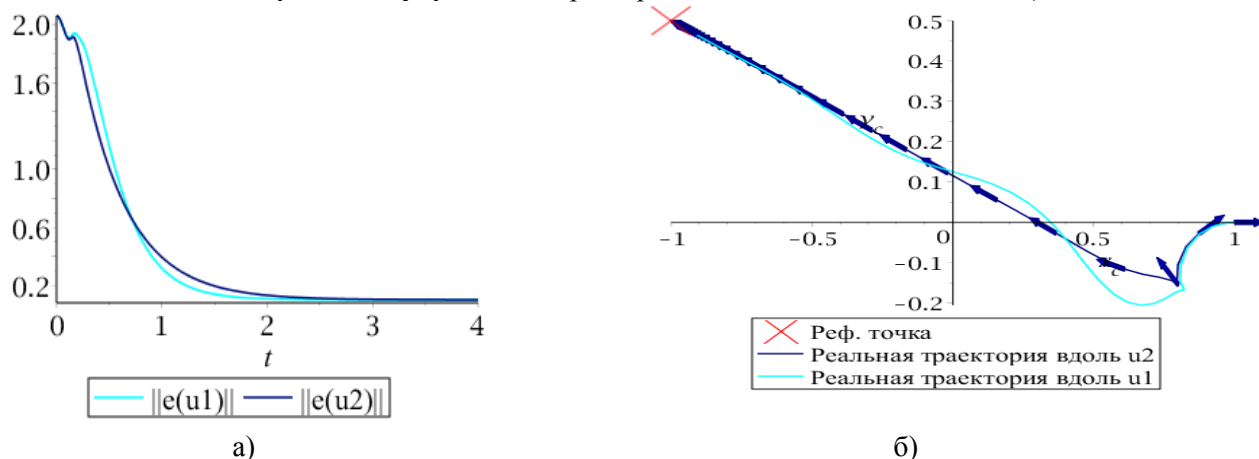


Рис. 4. Траектории и нормы ошибок для сценария 11

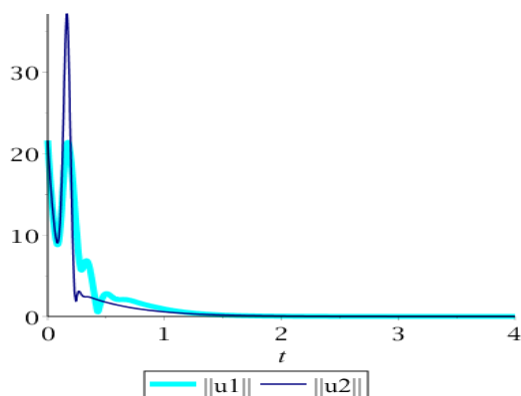


Рис. 5. Нормы управлений для сценария 11

Однако, в реальных задачах подобного типа маневров можно избежать, например, если предварительно развернуть робот по направлению к целевой точке (колесные системы данного типа позволяют сделать это почти что не меняя положения центра масс благодаря независимому управлению колесами).

Наконец отметим, что время, затраченное для численных расчетов с управлением  $u_2$ , составляет в среднем около 5% от времени расчетов с управлением  $u_1$  и это соотношение меняется незначительно во всех рассмотренных сценариях, что свидетельствует о вычислительной эффективности  $u_1$ .

## Заключение

В работе с помощью модификации техники SDDRE предложена реализация нелинейного следящего управления для модели двухколесной тележки. Метод основывается на искусственном представлении исходной системы в слабонелинейном виде и носит эвристический характер. Его достоинством по сравнению с обычным подходом SDDRE является вычислительная эффективность. Проведенные численные эксперименты показали, что время счета для предложенного управления в среднем составляет около 5% от времени счета для последнего. Вместе с тем, средний проигрыш по критерию качества составляет около 7%. Таким образом, исследуемый модифицированный подход может быть применен для решения тех задач слежения для колесных систем рассмотренного типа, в которых важна вычислительная эффективность. Примерами таких задач могут являться автономное управление колесной системой, бортовой вычислитель которой имеет существенные ограничения.

## Литература

1. Khalil H. K., Grizzle J. W. Nonlinear systems. 3-ed. NJ: Prentice hall, 2002.
2. A. Isidori. Nonlinear Control Systems. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
3. Camacho E. F., Alba C. B. Model predictive control. Springer Science & Business Media, 2013.
4. Четвериков В.Н. Плоскостность динамически линеаризуемых систем // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 12. С. 1665-1674.
5. Belinskaya Yu. S., Chetverikov V. N. Covering Method for Point-to-Point Control of Constrained Flat System // IFAC-Papers OnLine. 2015. Vol. 48 (11). Pp. 924-929.
6. Nekoo S. R. Tutorial and Review on the State-dependent Riccati Equation // Journal of Applied Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 8(2). Pp. 109-166.
7. Çimen T. Survey of state-dependent Riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2012. Vol. 35(4). Pp. 1025-1047.
8. Cloutier J.R. State-Dependent Riccati Equation Techniques: An Overview // Proc. American Control Conference. 1997. Vol. 2. Pp. 932-936.
9. Heydari A., Balakrishnan S.N. Path Planning Using a Novel Finite Horizon Suboptimal Controller // Journal of guidance, control, and dynamics. 2013. Vol. 36(4). Pp. 1210-1214.
10. Heydari A., Balakrishnan S.N. Closed-Form Solution to Finite-Horizon Suboptimal Control of Nonlinear Systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2015. Vol. 25(15). Pp. 2687-2704.
11. Дмитриев М.Г., Макаров Д.А. Гладкий нелинейный регулятор в слабо нелинейной системе управления с коэффициентами, зависящими от состояния. // Труды Института системного анализа РАН. Т. 64. №4. 2014. С. 53-58.
12. Макаров Д.А. Подход к построению нелинейного управления в задаче слежения с коэффициентами, зависящими от состояния Часть I. Алгоритм // Информационные технологии и вычислительные системы. 2017. №3. С. 10-19.
13. Макаров Д.А. Построение управления и наблюдателя в слабо нелинейной задаче слежения с помощью дифференциальных матричных уравнений Риккати // Информационные технологии и вычислительные системы. 2018. № 4. С. 63-71.
14. Макаров Д.А., Хачумов М.В. Синтез в слабо нелинейной задаче управления на основе SDRE техники на конечном интервале // Информационные технологии и вычислительные системы. 2020. №4. С. 17-25.
15. Korayem M. H., Nekoo S. R., Korayem A. H. Finite time SDRE control design for mobile robots with differential wheels // Journal of Mechanical Science and Technology. 2016. Vol. 30(9). Pp. 4353-4361.
16. Korayem M. H., Esfeden R. A., Nekoo S. R. Path planning algorithm in wheeled mobile manipulators based on motion of arms // Journal of Mechanical Science and Technology. 2015. Vol. 29(4). Pp. 1753-1763.