ДИНАМИКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕМЕННОГО ТИПА

Кушнер А.Г.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65;

kushner@physics.msu.ru,

Кушнер Е.Н.

Московский государственный технический университет гражданской авиации,
г. Москва Кронштадтский бульвар, д.20.

ekushner@ro.ru

Аннотация: В работе предложен подход построения точных решений дифференциального уравнения второго порядка переменного типа, основанный на теории конечномерных динамик систем эволюционных дифференциальных уравнений. Теория конечномерных динамик, в свою очередь, основана на теории тасующих симметрий обыкновенных дифференциальных уравнений и является естественным распространением теории динамических систем на эволюционные уравнения в частных производных.

Ключевые слова: уравнения переменного типа, конечномерные динамики, точные решения.

Введение

Методы конечномерных динамик позволяют выделять конечномерные подмногообразия в бесконечномерном пространстве решений эволюционных дифференциальных уравнений в частных производных. Эти подмногообразия состоят из решений обыкновенных дифференциальных уравнений и могут быть использованы для построения точных решений эволюционных уравнений даже в случае, когда уравнение не обладает достаточным запасом симметрий, а также для исследования устойчивости решений и построения новых численных методов.

Идея этого метода состоит в следующем. Обыкновенные дифференциальные уравнения (k+1)-го порядка, разрешенные относительно старшей производной, с геометрической точки зрения представляют собой распределение прямых на пространстве k-джетов функций одной переменной. Поэтому симметрии таких уравнений – это диффеоморфизмы пространства джетов, сохраняющие это распределение.

Такие инфинитезимальные диффеоморфизмы представляются векторными полями, которые образуют алгебру Ли. В этой алгебре Ли есть идеал, состоящий из векторных полей, сдвиги вдоль которых сохраняют каждую интегральную кривую распределения. Это так называемые характеристические симметрии.

Факторизуя алгебру симметрий по этому идеалу, мы получаем алгебру Ли тасующих симметрий. Это название оправдано тем, что её элементы можно рассматривать как векторные поля, сдвиги вдоль которых перемешивают, т.е. «тасуют» интегральные кривые распределения.

Оказывается, что каждое векторное поле тасующих симметрий однозначно определяется некоторой функцией на пространстве k-джетов. Эта функция называется производящей для данного тасующего поля. Сдвиги любой интегральной кривой распределения вдоль траекторий векторного поля тасующих симметрий пождают поверхность, «склееную» из других интегральных кривых.

Эту поверхность можно интерпретировать как график эволюционного дифференциального уравнения в частных производных с двумя независимыми переменными, порожденного производящей функцией.

Описанная конструкция допускает обращение. Пусть дано эволюционное дифференциальное уравнение

$$u_t = \varphi(x, u, u_x, u_{xx}).$$

Если удастся подобрать обыкновенное дифференциальное уравнение, для которого функция φ является производящей функцией тасующих симметрий, то решив его и сдвинув график решения этого обыкновенного дифференциального уравнения вдоль векторного поля тасующей симметрии, мы получим решение исходного эволюционного уравнения.

В этом состоит основная идея метода конечномерных динамик. Более детальное изложение см. в [1,2]. В работе [3] этот метод был обобщен на системы эволюционных уравнений. Это позволило распространить его на неэволюционные уравнения, в том числе на линейные уравнения эллиптического и гиперболического типов, что, в свою очередь, привело нас к новому методу их интегрирования.

Динамики второго порядка для уравнения Бюргерса – Хаксли были построены в работt [4]. Динамики третьего порядка в работе [5] были найдены для уравнений типа Рапорта – Лиса, возникающих в теории двухфазной фильтрации. Эти динамики были использованы для построения аттракторов. На основе динамик третьего порядка был построен численный метод для решения начально-краевых задач для уравнений типа Рапорта – Лиса [6]. Применение динамик для построения точных решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, не обязательно эволюционных, рассмотрено в [7]. Динамики обобщённых уравнений Кортевега де Фриза и его точные решения построены в [8,9].

В данной работе этот метод используется для построения точных решений уравнений в частных производных переменного типа следующего вида:

$$xu_{xx} + u_{yy} = \alpha u + \beta u_y + h(x), \qquad (1)$$

где $h(x)$ – некоторая функция класса C^∞. Это уравнение представляет собой неоднородный вариант уравнения Келдыша [10].

Отметим, что это уравнение меняет тип с гиперболического на эллиптический при переходе x от отрицательных значений к положительным. В точках $x = 0$ уравнение имеет параболический тип. Поэтому (1) уравнение не является эволюционным и прямое применение методов конечномерных динамик для него невозможно. Однако его можно записать в виде системы двух эволюционных дифференциальных уравнений, если ввести вспомогательную переменную $v = u_y$:

$$u_t = v, \;\; v_t = -xu_{xx} + \alpha u + \beta v + h(x). \qquad (2)$$

Здесь обозначено $t = y$.

1 Симметрии систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений

Напомним основные определения теории конечномерных динамик и симметрий дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $k+1$:

$$\begin{cases} p^{(k+1)} = P(x, p, q, p', q', \dots, p^{(k)}, q^{(k)}), \\ q^{(k+1)} = Q\big(x, p, q, p', q', \dots, p^{(k)}, q^{(k)}\big). \end{cases} \qquad (3)$$

Здесь x – независимая переменная, а p, q – неизвестные функции. Эта система порождает одномерное распределение P на пространстве джетов $J^k(1,2)$, интегральные кривые которого являются продолжением графиков её решений в $J^k(1,2)$. Оно может быть задано векторным полем

$$D = \partial_x + p_1\,\partial_{p_0} + q_1\,\partial_{q_0} + \dots + p_{k-2}\,\partial_{p_{-1}} + q_{k-2}\,\partial_{q_{k-1}} + P(x, p_0, q_0, p_1, q_1, \dots, p_k, q_k)\,\partial_{p_k} + Q(x, p_0, q_0, p_1, q_1, \dots, p_k, q_k)\,\partial_{q_k}.$$

Здесь $x, p_0, q_0, p_1, q_1, \dots, p_k, q_k$ - канонические координаты на пространстве k-джетов.

Векторное поле X пространстве $J^k(1,2)$ называется инфинитеземальной симметрией этой системы (3), если сдвиги вдоль него сохраняют распределение P. Все инфинитеземальные симметрии образуют алгебру Ли по отношению к скобке Ли. Обозначим эту алгербру через Symm P.

Инфинитеземальная симметрия называется характеристической, если сдвиги вдоль её траекторий сохраняют каждую интегральную кривую распределения P. Характеристические симметрии образуют идеал в алгебре Ли Symm P, который обозначачим через Char P.

Фактор-алгебра Ли

Shuff P = Symm P / Char P

называется алгеброй Ли тассующих симметрий. Тасующие симметрии задаются представителями вида

$$S_{(\phi,\psi)} = \varphi\,\partial_{p_0} + \psi\,\partial_{q_0} + D(\varphi)\,\partial_{p_0} + D(\psi)\,\partial_{q_0} + \dots + D^k(\varphi)\,\partial_{p_k} + D^k(\psi)\,\partial_{q_k}.$$

Здесь φ и ψ – некоторые функции на пространстве $J^k(1,2)$ и D^k – k-ая степень оператора D. Пара функций (ϕ, ψ) называется производящей вектор-функцией для системы (3). Эта пара удовлетворяет системе дифференциальных уравнений, связывающей функции P, Q, φ, ψ (см. [3]).

2 Динамики систем эволюционных уравнений

Имея в виду изучение уравнения (1), рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений

$$u_t = v, \qquad v_t = f(x, u, v, u_x, v_x, u_{xx}, \dots). \qquad (4)$$

Здесь функция f зависит только от производных по переменной x до порядка k включительно. В пространстве $J^k(1,2)$ k-джетов вектор-функций одной переменной зададим две функции

$$\phi = p_0, \ \psi = f(x, p_0, q_0, p_1, q_1, \dots, p_k, q_k) \qquad (5)$$

и будем считать, что пара функций (ϕ, ψ) является производящей вектор-функцией для системы (3).

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (3) называется конечномерной динамикой для эволюционной системы (4) и уравнения

$$u_{tt} = f(x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}, \dots). \qquad (6)$$

Число k+1 называется порядком динамики.

Следующая теорема указывает способ нахождения конечномерных динамик [3,11].

Теорема 1 *Система обыкновенных уравнений* (3) *является конечномерной динамикой уравнения* (6) *тогда и только тогда, когда пара функций* (5) *удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений:*

$$\begin{cases} D^{k+1}(\varphi) = S_{(\phi,\psi)}(P), \\ D^{k+1}(\psi) = S_{(\phi,\psi)}(Q). \end{cases}$$

Если кривая *L* является продолжением графика решения системы (3), а $S_{(\phi,\psi)}$ – векторное поле тасующей симметрии, то сдвигая кривую *L* вдоль траекторий этого векторного поля, мы получим решение уравнения (6).

В следующем разделе мы применим описанный метод к уравнению (1).

2 Динамики второго порядка уравнения Келдыша

В качестве примера рассмотрим уравнение (1) с квадратичной функцией h:

$$xu_{xx} + u_{yy} = \alpha u + \beta u_y + ax^2 + 2bx + c. \qquad (7)$$

Здесь α, β, a, b, c – некоторые постоянные, причем $\alpha \neq 0$. Это уравнение запишем в виде системы (4), переобозначив $t = y$:

$$u_t = v, \qquad v_t = -xu_{xx} + \alpha u + \beta v + ax^2 + 2bx + c.$$

Теорема 2 Система обыкновенных уравнений второго порядка

$$p'' = -\frac{2a}{\alpha}, \ q'' = 0 \qquad (8)$$

является конечномерной динамикой уравнения (7).

Общее решение системы (8) легко находится:

$$p(x) = -\frac{a}{\alpha}x^2 + C_3x + C_4, \quad q(x) = C_1x + C_2.$$

Здесь $C_1, \dots, C_4$ – произвольные постоянные. В результате сдвига графика этого решения вдоль траекторий векторного поля $S_{(\phi,\psi)}$ получаем точное решение уравнения (7):

$$u(x,y)=\frac{1}{\alpha^2\gamma}\Bigg(\Bigg(\Bigg((C_3x+C_4)\alpha^2+\alpha\left(\frac{c}{2}+bx\right)+ax\Bigg)\gamma+((\beta C_3-C_1)\,x-C_2+\beta C_4)\alpha^2$$
$$+\alpha\beta\left(\frac{c}{2}+bx\right)+\alpha\beta x)\exp\left(\frac{\beta-\gamma}{2}t\right)$$
$$+\Bigg(\Bigg((C_3x+C_4)\alpha^2+\alpha\left(\frac{c}{2}+bx\right)+ax\Bigg)\gamma+\big((C_1-\beta C_3)x+C_2-\beta C_4\big)\alpha^2-\alpha\beta\left(\frac{c}{2}+bx\right)$$
$$-a\beta x)\exp\left(\frac{\beta+\gamma}{2}t\right)-\gamma((ax^2+2bx+c)\alpha+2ax)\Bigg),$$

где $\gamma=\sqrt{\beta^2+4\alpha}.$

Мы предполагаем, что $\beta^2+4\alpha\ge 0$. Случай $\beta^2+4\alpha<0$ приводит к несколько иной формуле, которую мы здесь не приводим.

В частности, при

$$\alpha=\frac{3}{4},\qquad \beta=1,\qquad a=1,\qquad b=0,\qquad c=0,\quad C_1=0,\quad C_2=0,\qquad C_3=0,\quad C_4=1$$

получаем решение

$$u(x,y)=\frac{8}{9}\left(\left(2\left(\frac{9}{32}+x\right)+\frac{9}{32}+x\right)\exp\left(-\frac{t}{2}\right)+\left(2\left(\frac{9}{32}+x\right)-\frac{9}{32}-x\right)\exp\left(\frac{3t}{2}\right)-\left(\frac{3}{2}x^2+4x\right)\right),\quad (9)$$

график которого изображен на Рис. 1.

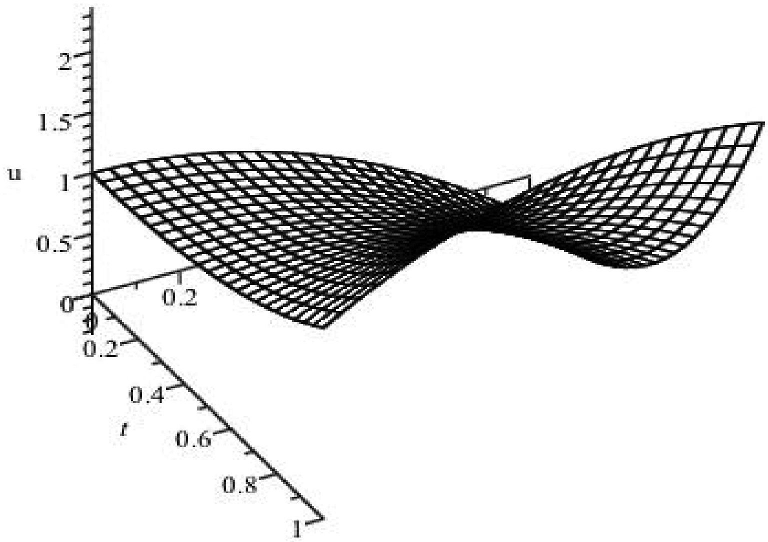

Рис. 1. График функции (9).

Литература

1. *Kruglikov B. S., Lychagina O. V.* Finite dimensional dynamics for Kolmogorov – Petrovsky –Piskunov equation // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2005. V. 19. (2005), P. 13–28.
2. *Lychagin V.V., Lychagina O.V.* Finite Dimensional Dynamics for Evolutionary Eguations, Nonlinear Dyn., 48 (2007), 29-48.
3. *A. Gorinov, A. Kushner.* Dynamics of Evolutionary PDE Systems // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2020. — Vol. 41, no. 12. — P. 2448–2457.
4. *A. Kushner, R. Matviichuk.* Exact solutions of the Burgers – Huxley equation via dynamics // Journal of Geometry and Physics. – 2020. – Vol. 151. – P.1–12.
5. *Ахметзянов А.В., Кушнер А.Г., Лычагин В.В. Аттракторы в моделях фильтрации //* Доклады Академии наук. — 2017. — Т. 472, № 6. — С. 627–630.
6. *A. Salnikov, A. Akhmetzyanov, A. Kushner, V. Lychagin*. A numerical method for constructing attractors of evolutionary filtration equations // 2019 1st International Conference on Control Systems, Mathematical Modelling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). — IEEE, 2019. — P. 22–24.

7. *A. Kushner, R. Matviichuk.* Dynamics and exact solutions of non-evolutionary partial differential equations // Differential Geometry and its Application. - 2021. - Vol. 76. - P. 101761.
8. *E. Kushner*, *A. Kushner*, *A. Samohin.* Differential invariants of third order evolutionary non-linear pdes // 2019 Twelfth International Conference Management of large-scale system development (MLSD). — IEEE Piscataway, NJ, United States, 2019.
9. *Кушнер А. Г., Мачоган О. Ю. Динамика эволюционных уравнений третьего порядка //* Материалы весенней научной сессии преподавателей кафедры геометрии математического факультета МПГУ и кафедры алгебры и геометрии факультета естественных наук университета им. Палацкого в Оломоуце. — МПГУ Москва, 2017. — С. 32–34.
10. *Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области* // ДАН СССР. – 1951. – Т. 77. – No 2. – С. 81-83.
11. *A. Kushner, V. Lychagin, V. Rubtsov.* Contact geometry and non-linear differential equations. – Cambridge: Cambridge University Press, 2007.