СИММЕТРИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГЛУБОКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СУСПЕНЗИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Кушнер А.Г., Мухина С.С.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65
kushnera@mail.ru, sveta.mukhina.1998@mail.ru

Аннотация: Рассматривается математическая модель фильтрации суспензии в одномерной пористой среде, описываемая системой дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. В работе проведена групповая классификация исходной модели, найдены виды функций коэффициента захвата частиц, при которых система допускает симметрии. Для линейного вида функции захвата частиц построено точное решение.

Ключевые слова: глубокая фильтрация, суспензия, осадок, симметрии, алгебра Ли, пространство джетов.

Введение

В данной работе рассматривается задача одномерной глубокой фильтрации суспензии в пористой среде. Под суспензией понимают смесь жидкости или газа с твёрдыми частицами, которые находятся во взвешенном состоянии. Саму пористую среду мы считаем недеформируемой и однородной.

Задача фильтрации суспензии в пористой среде изучается достаточно давно, так как является актуальной задачей во многих областях, например, в нефтяной и химической. Её важное практическое приложение при разработке нефтяных месторождений обуславливается проблемами, связанными с повреждением околоскважной зоны пласта под воздействием проникших в неё компонент бурового раствора. При бурении скважины под воздействием избыточного давления фильтрат нефтяного раствора с мелкими частицами проникает внутрь пласта и ухудшает свойства добычи. Существование зоны с ухудшенными свойствами обуславливает значительные потери энергии пласта.

Обычно выделяют два главных подхода описания процесса глубокой фильтрации суспензии: статистический, учитывающий распределение пор и твердых частиц по размерам, и феменологический, который основывается на кинетических уравнениях зависимости между проницаемостями пористой среды и содержанием твердых частиц. Мы рассматриваем именно второй подход.

При большом количестве твердых частиц в порах они уже не внедряются в пористую среду. Возникает внешняя фильтрационная корка. Также возможен случай возврата частицы в дисперсионную среду (рис.1). При этом большинство работ рассматривает либо процесс закупорки пор, либо один из этих случаев. Задача объединения моделей практически не исследована.

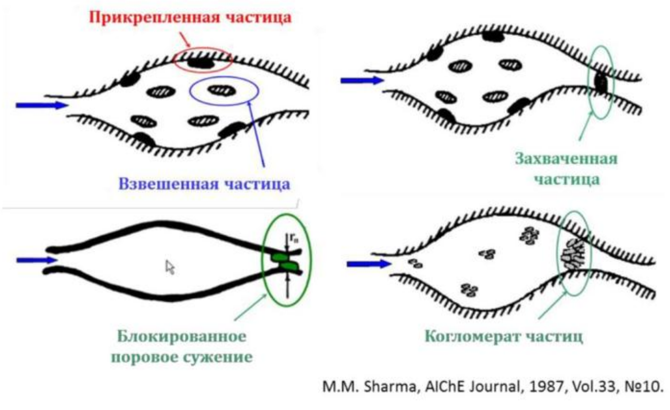

Рис. 1. Способы удержания частиц

В работе [1] строятся различные модели, описывающие процессы захвата и декольматажа дисперсионной фазы, например, путем осаждения на стенках порового пространства, путем закупоривания поровых сужений твердыми частицами. Рассматривается случай с достаточно крупными частицами, что даёт возможность пренебречь диффузией. В этой же работе анализируются результаты множества экспериментов и в результате этого анализа показывается, что расхождение с аналитической зависимостью для коэффициента захвата частиц может быть существенным.

В данной работе проведён групповой анализ (см., например, [3-5]) системы двух дифференциальных уравнений, описывающих процесс одномерной фильтрации суспензии. В эту систему входит функция, которая означает вероятность захвата частиц пористой средой в виде возникновения осадка, и определяется экспериментально.

1 Симметрии дифференциальных уравнений

Модели физических процессов составляются исходя из законов сохранения (импульса, энергии, массы и т. п.), которые, в свою очередь, порождают симметрии дифференциальных уравнений, которые эти процессы описывают. Например, принцип относительности Галилея подразумевает одинаковость времени во всех системах отсчета. Это приводит к инвариантности дифференциальных уравнений относительно преобразований Галилея

$$x \to x + vt,\ \ y \to y\ ,\ \ z \to z.$$

Здесь мы предполагаем, что одна инерциальная система отсчета движется вдоль другой инерциальной системы в направлении оси x с постоянной скоростью v. Таким образом, преобразование Галилея является симметрией соответствующих дифференциальных уравнений. Для уравнений в частных производных это приводит к существованию решений в виде бегущих волн. Такие волны наблюдаются, например, при колебаниях струны.

Однако у многих дифференциальных уравнений существуют и другие симметрии, для которых инвариантные решения могут иметь более сложную форму. Способ нахождения симметрий дифференциальных уравнений и их применение для построения точных решений был предложен норвежским математиком Софусом Ли (Sophus Lie), который рассматривал преимущественно обыкновенные дифференциальные уравнения [2]. Его идеи были распространены на уравнения в частных производных новосибирским математиком Л.В. Овсянниковым [3].

Симметрией дифференциального уравнения называется преобразование независимых, зависимых переменных и их производных, которые не меняют вид этого уравнения. Преобразования зависимых и независимых переменных называются точечными преобразованиями. Преобразования, полученные из точечных и распространенные на производные, называются преобразованиями Ли. Частным случаем преобразований Ли являются контактные преобразования, затрагивающие преобразования производных первого порядка. Методы теории контактных преобразований описаны в монографии [4].

Процесс нахождения всех возможных симметрий дифференциального уравнения приводит к очень сложным нелинейным уравнениям, решить которые часто не представляется возможным даже для простых уравнений. Выход из этой ситуации был найден Софусом Ли.

Он предложил ограничиться так называемыми инфинитезимальными симметриями, т.е. преобразованиями, полученными в результате сдвига вдоль траекторий некоторых векторных полей. Эти векторные поля определяются набором функций (компонентами векторного поля), для нахождения которых нужно решать линейные дифференциальные уравнения. Для уравнений в частных производных такие системы являются переопределёнными, что значительно облегчает их решение.

Преобразования симметрий дифференциального уравнения образуют группу Ли, а векторные поля, порождающие эти преобразования образуют алгебру Ли. Поэтому исследование симметрий дифференциальных уравнений называется групповым анализом. Групповой анализ является универсальным и эффективным методом аналитического решения дифференциальных уравнений.

Данная работа посвящена проблеме групповой классификации глубокой фильтрацией суспензии в пористом пространстве. С помощью найденных симметрий оказалось возможным построение точных решений исходной модели, которые ранее не были известны.

2 Математическая модель глубокой фильтрации суспензии

Модель суспензии состоит из двух фаз: первая фаза – нефть, вторая – твердые взвешенные мельчайшие частицы.

Пусть $\mathrm{t}-$ время фильтрации, $\mathrm{x}-$ пространственная координата (ось OX направлена в сторону движения флюида), $\mathrm{u(t,x)}-$ концентрация взвешенных частиц (дисперсионной фазы), $\mathrm{v(t,x)}-$ концентрация захваченных частиц, $\mathrm{h(v)}-$ коэффициент захвата (накопления) частиц, выражающий вероятность захвата частицы пористой средой.

Согласно феменологической модели, необходима замкнутость системы дифференциальных уравнений: уравнение баланса массы, кинетическое уравнение захвата частиц путем возникновения осадка. Рассмотри следующую модель глубокой фильтрации суспензии (см., например, [1]):

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} = -\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} - \mathrm{h(v)u}, \\ \quad \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{t}} = \mathrm{h(v)u}. \end{cases} \tag{1}$$

Эта модель была получена при следующих предположениях:

- изначально пористая среда насыщена той же жидкостью, что и дисперсионная среда;
- скорости частиц совпадают со скоростью несущей жидкости;
- концентрации суспензии не влияет на ее вязкость;
- скорость фильтрации и пористость пространства постоянны;
- частицы достаточно большие, поэтому диффузионным движением жидкости пренебрегается.

3 Симметрии уравнений глубокой фильтрации

Следуя подходу Ли, мы будем искать векторные поля, преобразования сдвига, вдоль траекторий которых порождает симметрии системы дифференциальных уравнений.

Координатное представление векторного поля имеет вид линейного дифференциального оператора:

$$\mathrm{X} = \mathrm{A(t,x,u,v)}\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{B(t,x,u,v)}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{E(t,x,u,v)}\frac{\partial}{\partial \mathrm{u}} + \mathrm{F(t,x,u,v)}\frac{\partial}{\partial \mathrm{v}}, \tag{2}$$

где $\mathrm{A, B, E, F}-$ гладкие функции своих аргументов.

Система (1) определяет гладкое подмногообразие $\mathcal{E}$ в пространстве 1-джетов функций $\mathrm{J}^1(2;2)$ с каноническими координатами $\mathrm{t, x, u_{0,0}, v_{0,0}, u_{1,0}, v_{1,0}, u_{0,1}, v_{0,1}}$: (см., например, [5])

$$\mathcal{E}\colon \begin{cases} \mathrm{u_{1,0} + u_{0,1} + h(v_{0,0})u_{0,0} = 0}, \\ \quad \mathrm{v_{1,0} - h(v_{0,0})u_{0,0} = 0}. \end{cases} \tag{3}$$

Обозначив функции, стоящие в левых частях первого и второго уравнений системы (3) через $\mathrm{f_1}$ и $\mathrm{f_2}$ соответственно, получим условия, при которых векторное поле X является симметрией системы (1):

$$\left(\Phi_\tau^{(1)}\right)^* (\mathrm{f_i}) = \lambda_{\mathrm{i1}}^\tau \mathrm{f_1} + \lambda_{\mathrm{i2}}^\tau \mathrm{f_2}. \tag{4}$$

Здесь $\Phi_\tau^{(1)}$ – продолжение преобразования сдвига вдоль траекторий векторного поля X на пространство 1-джетов $\mathrm{J}^1(2;2)$, а λ_{ij} – функции на пространстве 1-джетов. Звёздочка означает индуцированное отображение на пространстве функций.

Продифференцировав обе части формулы (4) по параметру τ при $\tau = 0$, получим:

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0} \left(\Phi_\tau^{(1)}\right)^* (\mathrm{f_i}) = \mathrm{h_{i1}f_1 + h_{i2}f_2},$$

где $\mathrm{h_{ij}}$ – производные Ли вдоль продолженного в пространство джетов векторного поля $\mathrm{X}^{(1)}$ функций λ_{ij}.

Формулу (6) можно записать иначе:

$$\mathrm{X}^{(1)}(\mathrm{f_i}) = \mathrm{h_{i1}f_1 + h_{i2}f_2}.$$

Ограничив последнее равенство на подмногообразие $\mathcal{E}$, получим уравнения для определения векторного поля X: $X^{(1)}(f_i)\big|_{\mathcal{E}} = 0$.

Здесь $i = 1,2$. Решая эту систему, получим искомые функции A, B, E, F. Результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема. 1) Для произвольной функции $h(v)$ система дифференциальных уравнений (1) обладает очевидными симметриями сдвига вдоль осей координат t и x. Эти симметрии порождены векторными полями ∂_t и ∂_x.

2) Если функция h имеет вид: $h(v) = k(\alpha v + \beta)^{\delta}$

для некоторых постоянных α, β, δ, k где $\alpha, \beta, k \neq 0$ и число δ не равно нулю или единице, то система (1) обладает алгеброй Ли симметрий, порожденной векторными полями ∂_t, ∂_x,

$$-\delta\alpha\left(t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}\right) + \alpha u\frac{\partial}{\partial u} + (\alpha v + \beta)\frac{\partial}{\partial v},$$

$$A(x-t)\frac{\partial}{\partial t} + uA'(x-t)\frac{\partial}{\partial u}.$$

3) Если функция h линейна, т.е. имеет вид

$h(v) = \alpha v + \beta$

для некоторых постоянных α, β $(\alpha \neq 0)$, то алгебра Ли симметрий системы (1) порождена векторными полями ∂_t, ∂_x, а также векторными полями

$$A(x-t)\frac{\partial}{\partial t} + uA'(x-t)\frac{\partial}{\partial u},$$

$$B(x)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) - (v + \alpha^{-1}\beta)B'(x)\frac{\partial}{\partial v}.$$

Здесь A, B – произвольные дифференцируемые функции.

4 Точные инвариантные решения

Рассмотрим случай линейной функции $h(v) = \alpha v + \beta$ и найдём решения системы (1), инвариантные относительно сдвигов вдоль векторного поля

$$X = -\alpha t\frac{\partial}{\partial t} - \alpha x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha u\frac{\partial}{\partial u} + (\alpha v + \beta)\frac{\partial}{\partial v}.$$

Это векторное поле обладает тремя функционально независимыми первыми интегралами

$\frac{x}{t}$, ut, $\left(v + \frac{\beta}{\alpha}\right)t$.

Таким образом, инвариантные решения имеют вид

$$u(t,x) = t^{-1}U\left(\frac{x}{t}\right),\; v(t,x) = t^{-1}V\left(\frac{x}{t}\right) - \frac{\beta}{\alpha}. \qquad (5)$$

Подставив (5) в (1), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \alpha U(V-1) + (z+1)U' = 0, \\ V + zV' - \alpha VU = 0, \end{cases}$$

где $z = t^{-1}x$, $U = U(z)$, $V = V(z)$. Решение этой системы имеет вид

$$V(z) = \frac{C_1 z^{C_1-1}}{C_2(z-1)^{C_1} + \alpha z^{C_1}}, \quad U(z) = \frac{C_1 C_2 (z-1)^{C_1}}{\alpha(z-1)(C_2(z-1)^{C_1} + \alpha z^{C_1})}.$$

Здесь C_1, C_2 – произвольные постоянные. Подставив найденные решения в формулы (5), получим двухпараметрическое решение системы (1):

$$u(t,x) = \frac{C_1C_2\left(\frac{x-t}{t}\right)^{C_1}}{\alpha(t-x)\left(C_2\left(\frac{x-t}{t}\right)^{C_1} + \left(\frac{x}{t}\right)^{C_1}\alpha\right)}, \qquad v(t,x) = \frac{C_1\left(\frac{x}{t}\right)^{C_1-1}}{t\left(C_2\left(\frac{x-t}{t}\right)^{C_1} + \left(\frac{x}{t}\right)^{C_1}\alpha\right)} - \frac{\beta}{\alpha}. \qquad (6)$$

На рис.2 - рис.5 представлены графики полученных точных решений (6) в разные моменты времени при следующих значениях произвольных постоянных и входящих в функцию h постоянных: $C_1 = 1.1$, $C_2 = -0.1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 1$.

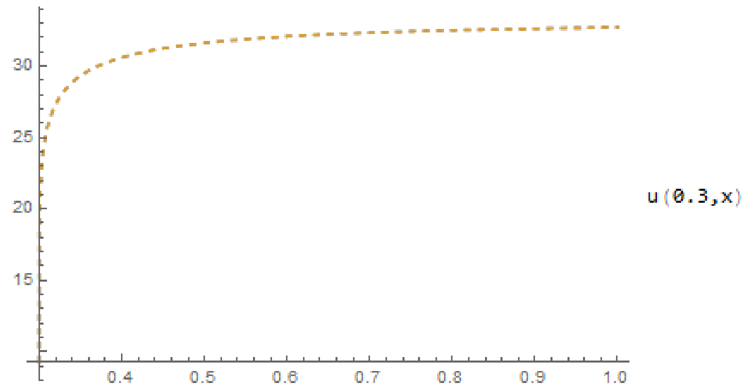

Рис. 2. Концентрация взвешенных частиц в момент времени 0.3

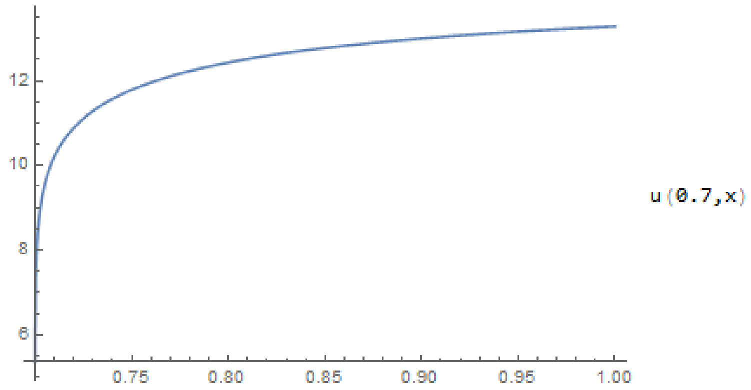

Рис. 3. Концентрация взвешенных частиц в момент времени 0.7

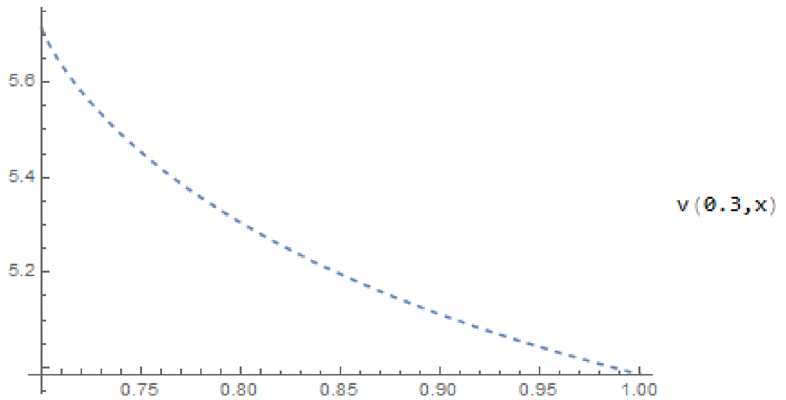

Рис. 4. Концентрация захваченных частиц в момент времени 0.3

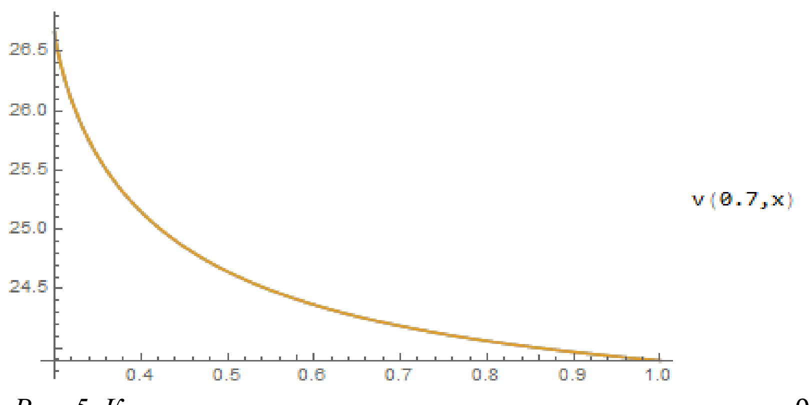

Рис. 5. Концентрация захваченных частиц в момент времени 0.7

Заключение

В докладе проведена групповая классификация уравнений фильтрации суспензии в пористой среде с захватом частиц путем возникновения осадка. Найдены всевозможные виды функций коэффициента захвата частиц, при которых система допускает симметрии. С помощью найденных симметрий построено частное точное решение системы уравнений фильтрации суспензии.

Литература

1. *Herzig J.P., Leclerc D.M. and Le Goff P.*, Flow of Suspensions through Porous Media – Application to Deep Filtration, Ind. Eng. Chem. 62(5), 8–35, (1970).
2. *Lie S.* Begrundung einer Invarianten - Theorie der Beruhrungs - Transformationen. Math. Ann. 8, 215–303 (1874).
3. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука. – 1978. – 399 с.
4. *Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N.* Contact Geometry and Nonlinear Differential Equations. Encyclopedia of Mathematics and its Applications – 2007, vol. 101. – Cambridge: Cambridge University Press. – P. xxii+496.
5. *Krasilshchik I. S., Lychagin V. V., Vinogradov A. M.*, Geometry of jet spaces and nonlinear partial differential equations, New York: Gordon and Breach, 1986.