ПОЛОЖЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛЯХ РЫНКА[37]

Котюков[1] А.М., Павлова[1,2,3] Н.Г., Жуковский С.Е.[1]

[1]Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д. 65
[2]Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
Россия, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.
[3]Российский университет дружбы народов, Россия, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
amkotyukov@mail.ru, natasharussia@mail.ru,amkotyukov@mail.ru

Аннотация: Исследуется вопрос существования равновесия в различных моделях рынка. В рассматриваемых моделях отображения спроса и предложения восстанавливаются по эластичностям по ценам на товары, присутствующие на рынке. Получены необходимые и достаточные условия существования положения равновесия в модели рынка без импорта. Получены как следствия теорем о точках совпадения отображений, действующих в метрических пространствах, достаточные условия существования положения равновесия в открытой модели рынка.

Ключевые слова: модель рынка, положение равновесия, точка совпадения.

Введение

Фундаментальным понятием в исследовании рыночных моделей является положение равновесия. Эта идея была предложена еще Адамом Смитом [1] в его трактате «An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations». Математическое содержание этому понятию придал Леон Вальрас [2] во второй половине XIX века. Значительный прорыв в вопросе об условиях существования положения равновесия был достигнут благодаря работе Кеннета Джозефа Эрроу и Жерара Дебре [3].

Суть понятия положения равновесия состоит в следующем. Пусть на рынке имеется две группы участников – производители и потребители. Первые производят различные товары, руководствуясь принципом удовлетворения потребностей потребителей и максимизации собственной прибыли. Вторые, в свою очередь, приобретают товары на некоторый имеющийся у них бюджет, стремясь при этом удовлетворить свои потребности. В результате деятельности производителей образуется совокупный объем товаров, который называется предложением. Совокупный необходимый потребителям объем товаров называется спросом. Из экономических соображений ясно, что при различных ценах на товары спрос и предложение будут различными.

Естественно, что идеальной на рынке будет ситуация, при которой производители предлагают ровно тот объем товаров, который необходим потребителям. Действительно, при дефиците товаров в регионе существования рынка возникает неблагоприятная экономическая и, как следствие, социально-политическая ситуация. С другой стороны, если товаров на рынке слишком много, производители теряют прибыль. Это в свою очередь сказывается отрицательно на доходах (бюджете) потребителей и их покупательской способности, что ещё больше увеличивает разрыв между спросом и предложением. Таким образом, совокупное предложение на рынке должно равняться спросу. Такая ситуация называется положением экономического равновесия на рынке. Цены, при которых такое положение достигается, называются равновесными.

Нахождение положения равновесия представляет собой крайне нетривиальную задачу. Дело в том, что современные модели рынка являются нелинейными, и в общем случае получение достаточных условий существования положения равновесия, равно как и его нахождение, представляется не просто сложной задачей, но даже и невозможной. До недавних пор существовавшего математического аппарата было недостаточно для исследования нелинейных моделей рынка многих товаров. Однако, развитие теории накрывающих отображений и теории точек совпадения (см., например, [4], [5]) позволило получить содержательные результаты в теории экономического равновесия. В работах [6]-[10] теоремы о существовании точек совпадения у отображений, действующих в метрических пространствах, применены для получения достаточных условий существования положения равновесия в моделях рынка, в которых отображения спроса и предложения получены как решения экстремальных задач: задачи максимизации полезности при бюджетных ограничениях, задачи максимизации прибыли на технологическом множестве и др.

[37] *Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (госзадание № 075-00337-20-03, проект № 0714-2020-0005) и РФФИ (грант № 20-01-00610).*

В настоящей работе исследуется вопрос существования равновесия в открытой и закрытой моделях рынка, в которых отображения спроса и предложения восстанавливаются по эластичностям по ценам на товары, присутствующие на рынке.

1 Модель рынка

1.1 Модель закрытого рынка

Пусть задано число $n \in \mathbb{N}$, квадратные матрицы $\mathcal{E} = \left(E_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$, $\widetilde{\mathcal{E}} = \left(\tilde{E}_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ порядка n ($E_{ij}, \tilde{E}_{ij} \in \mathbb{R}$ для всех $i,j = \overline{1,n}$), векторы $\bar{c}_1 = (c_{11},\dots,c_{1n})$, $\bar{c}_2 = (c_{21},\dots,c_{2n}) \in \mathbb{R}^n_+$, причем $0 < c_{1i} < c_{2i}$ для всех $i = \overline{1,n}$, вектор $\bar{p}^* = (p_1^*,\dots,p_n^*) \in \mathbb{R}^n_+$ такой, что $c_{1i} \le p_i^* \le c_{2i}$ для всех $i = \overline{1,n}$, и векторы $\bar{D}^* = (D_1^*,\dots,D_n^*)$, $\bar{S}^* = (S_1^*,\dots,S_n^*) \in \mathbb{R}^n_+$.

Под математической моделью закрытого рынка (на рынке присутствуют только товары, произведенные производителями) будем понимать набор

$$\sigma_{\text{c}} = \left(\mathcal{E}, \widetilde{\mathcal{E}}, \bar{D}^*, \bar{S}^*, \bar{p}^*, \bar{c}_1, \bar{c}_2\right) \tag{1}$$

Множество всех наборов σ_{c} обозначим через Σ_{c}.

Параметры модели (1) имеют следующий смысл. Элементы матрицы $\mathcal{E}$ — коэффициенты эластичности спроса по цене:

$$E_{ij} = \frac{\partial D_i}{\partial p_j}\frac{p_j}{D_i}, i,j = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Здесь p_i — цена на товар с номером $i = \overline{1,n}$, $D_i = D_i(p_1,\dots,p_n)$ — спрос совокупного потребителя на товар с номером $i = \overline{1,n}$, E_{ij} — коэффициент эластичности спроса на товар с номером $i = \overline{1,n}$ по цене на товар с номером $j = \overline{1,n}$.

Элементы матрицы $\widetilde{\mathcal{E}}$ — коэффициенты эластичности предложения по цене:

$$\tilde{E}_{ij} = \frac{\partial S_i}{\partial p_j}\frac{p_j}{S_i}, i,j = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Здесь $S_i = S_i(p_1,\dots,p_n)$ — предложение совокупного производителя товара с номером $i = \overline{1,n}$, $\tilde{E}_{ij}$ — коэффициент эластичности предложения товара с номером $i = \overline{1,n}$ по цене на товар с номером $j = \overline{1,n}$.

Компоненты векторов $\bar{c}_1$ и $\bar{c}_2$ задают естественные ограничения на цены на товары:

$$c_{1i} \le p_i \le c_{2i}, i = \overline{1,n}.$$

Компонента вектора $\bar{D}^* = \bar{D}(p_1^*,\dots,p_n^*)$ — спрос на соответствующий товар, а компонента вектора $\bar{S}^* = \bar{S}(p_1^*,\dots,p_n^*)$ — предложение на соответствующий товар при установленных на рынке ценах $\bar{p}^* = (p_1^*,\dots,p_n^*)$.

Набор параметров $\left(\mathcal{E}, \widetilde{\mathcal{E}}, \bar{D}^*, \bar{S}^*, \bar{p}^*, \bar{c}_1, \bar{c}_2\right)$ однозначно определяет отображение спроса

$$\begin{gathered} D\colon [c_{11}; c_{21}] \times \dots \times [c_{1n}; c_{2n}] \to \mathbb{R}^n_+, \\ D(p_1,\dots,p_n) = \left(D_1(p_1,\dots,p_n),\dots,D_n(p_1,\dots,p_n)\right) \end{gathered} \tag{4}$$

и отображение предложения

$$\begin{gathered} S\colon [c_{11}; c_{21}] \times \dots \times [c_{1n}; c_{2n}] \to \mathbb{R}^n_+, \\ S(p_1,\dots,p_n) = \left(S_1(p_1,\dots,p_n),\dots,S_n(p_1,\dots,p_n)\right). \end{gathered} \tag{5}$$

Решая систему дифференциальных уравнений в частных производных (2), получаем явный вид отображения спроса:

$$D_i(p_1,\dots,p_n) = D_i^* \prod_{j=1}^{n} \left(p_j^*\right)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}}, i = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Аналогично, решая систему дифференциальных уравнений в частных производных (3) получаем явный вид отображения предложения:

$$S_i(p_1,\dots,p_n) = S_i^* \prod_{j=1}^{n} \left(p_j^*\right)^{-\tilde{E}_{ij}} p_j^{\tilde{E}_{ij}}, i = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Определение 1. Вектор $\bar{p} \in [c_{11}; c_{21}] \times \cdots \times [c_{1n}; c_{2n}]$ называется вектором равновесных цен (положением равновесия) в модели σ_c, если $D(\bar{p}) = S(\bar{p})$.

1.2 Модель открытого рынка

Пусть задано число $n \in \mathbb{N}$, квадратные матрицы $\mathcal{E} = (E_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $\widetilde{\mathcal{E}} = (\tilde{E}_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ порядка n ($E_{ij}, \tilde{E}_{ij} \in \mathbb{R}$ для всех $i,j = \overline{1,n}$), векторы $\bar{c}_1 = (c_{11},\dots,c_{1n})$, $\bar{c}_2 = (c_{21},\dots,c_{2n}) \in \mathbb{R}^n_+$, причем $0 < c_{1i} < c_{2i}$ для всех $i = \overline{1,n}$, вектор $\bar{p}^* = (p_1^*,\dots,p_n^*) \in \mathbb{R}^n_+$ такой, что $c_{1i} \le p_i^* \le c_{2i}$ для всех $i = \overline{1,n}$, и векторы $\bar{D}^* = (D_1^*,\dots,D_n^*)$, $\bar{S}^* = (S_1^*,\dots,S_n^*) \in \mathbb{R}^n_+$. Кроме того, будем предполагать, что задан вектор $\bar{a} = (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n_+$ такой, что существует хотя бы один номер $i = \overline{1,n}$: $a_i > 0$.

Под математической моделью открытого рынка (на рынок импортируется хотя бы один вид товара) будем понимать набор

$$\sigma_o = (\mathcal{E}, \widetilde{\mathcal{E}}, \bar{D}^*, \bar{S}^*, \bar{p}^*, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{a}) \tag{8}$$

Множество всех наборов σ_o обозначим через Σ_o.

Параметры $\mathcal{E}, \widetilde{\mathcal{E}}, \bar{D}^*, \bar{S}^*, \bar{p}^*, \bar{c}_1, \bar{c}_2$ модели (8) имеют тот же смысл, что и для закрытой модели (1). Компонента вектора $\bar{a}$ с номером $i = \overline{1,n}$ равна объему импортируемого на рынок товара с номером i.

Набор параметров $(\mathcal{E}, \widetilde{\mathcal{E}}, \bar{D}^*, \bar{S}^*, \bar{p}^*, \bar{c}_1, \bar{c}_2)$ однозначно определяет отображение спроса (4) и отображение предложения (5), явные виды которых определяются формулами (6) и (7) соответственно.

Определение 2. Вектор $\bar{p} \in [c_{11}; c_{21}] \times \cdots \times [c_{1n}; c_{2n}]$ называется вектором равновесных цен (положением равновесия) в модели σ_o, если $D(\bar{p}) = S(\bar{p}) + \bar{a}$.

2 Условия существования равновесия в моделях рынка

2.1 Условия существования равновесия в модели закрытого рынка

Для модели закрытого рынка легко получить необходимое условие существования положения равновесия.

Теорема 1. Пусть в модели закрытого рынка $\sigma_c \in \Sigma_c$ существует вектор равновесных цен. Тогда для параметров этой модели выполняется следующее условие:

$$rang(\mathcal{E} - \widetilde{\mathcal{E}}) = rang\, A,$$

где элементы матрицы $A = (a_{ij})_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n+1}}$ определяются по формулам

$$a_{ij} = \begin{cases} \tilde{E}_{ij} - E_{ij}, \qquad i,j = \overline{1,n}; \\ \ln D_i^* - \ln S_i^* + \sum_{k=1}^{n} (\tilde{E}_{ik} - E_{ik}) \ln p_k^*, i = \overline{1,n}, j = n+1. \end{cases}$$

Доказательство следует из теоремы Кронекера-Капелли и того, что для модели закрытого рынка $\sigma_c \in \Sigma_c$ система уравнений $D(\bar{p}) = S(\bar{p})$ эквивалентна следующей системе линейных относительно $\ln p_j$, $j = \overline{1,n}$, уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} (\tilde{E}_{ij} - E_{ij}) \ln p_j = \ln D_i^* - \ln S_i^* + \sum_{j=1}^{n} (\tilde{E}_{ij} - E_{ij}) \ln p_j^*,\ i = \overline{1,n}.$$

Следствие. В модели закрытого рынка $\sigma_c \in \Sigma_c$ с совершенно неэластичным спросом и совершенно неэластичным предложением в случае, когда $\bar{D}^* \ne \bar{S}^*$, положение равновесия не существует.

Теорема 2. Пусть параметры модели закрытого рынка $\sigma_c \in \Sigma_c$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\forall m = \overline{1,n}\ det\, F_m = 0, det\, G_m \ge 0,$$

где

$$F_m = (f_{mij})_{i,j=\overline{1,n+1}},\ f_{mij} = \begin{cases} \delta_{ij},\ i,j = \overline{1,n}; \\ C_{1i}, i = \overline{1,n}, j = n+1; \\ \tilde{E}_{ij} - E_{ij}, i = n+1, j = \overline{1,n}; \\ \ln \frac{D_i^*}{S_i^*} + \sum_{j=1}^{n} (\tilde{E}_{ij} - E_{ij}) \ln p_j^*,\ i = n+1, j = n+1; \end{cases}$$

$$G_m = (g_{mij})_{i,j=\overline{1,n+1}},\ g_{mij} = \begin{cases} \delta_{ij},\ i,j = \overline{1,n}; \\ C_{1i}, i = \overline{1,n}, j = n+1; \\ -\delta_{mj}, i = n+1, j = \overline{1,n}; \\ C_{1m}, i = n+1, j = n+1; \end{cases}$$

δ_{ij} — символ Кронекера.

Тогда в модели σ_c существует вектор равновесных цен.

Доказательство. Для того, чтобы вектор $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ был вектором равновесных цен в модели σ_c необходимо и достаточно, чтобы он был решением следующей системы уравнений и неравенств

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \left(\tilde{E}_{ij} - E_{ij}\right) \ln p_j = \ln D_i^* - \ln S_i^* + \sum_{j=1}^{n} \left(\tilde{E}_{ij} - E_{ij}\right) \ln p_j^*, \\ p_i \geq c_{1i}, \\ p_i \leq c_{2i}, \qquad i = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{9}$$

Система (9) совместна тогда и только тогда, когда совместна следующая система линейных уравнений и неравенств

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i = B_i, \\ x_i \geq C_{1i}, \\ x_i \leq C_{2i}, \end{cases} \qquad i = \overline{1,n}. \tag{10}$$

Здесь

$$b_{ij} = \tilde{E}_{ij} - E_{ij},\ \ i,j = \overline{1,n};\ B_i = \ln \frac{D_i^*}{S_i^*} + \sum_{j=1}^{n} \left(\tilde{E}_{ij} - E_{ij}\right) \ln p_j^*, i = \overline{1,n};$$

$$C_{1i} = \ln c_{1i}, i = \overline{1,n};\ C_{2i} = \ln c_{2i}, i = \overline{1,n};$$

В силу теоремы 3 и её следствий из [12] получаем, что для совместности системы (10) достаточно выполнения условий

$$\forall \mathrm{m} = \overline{1,\mathrm{n}}\ \det \mathrm{F_m} = 0;$$

$$F_m = (f_{mij})_{i,j=\overline{1,n+1}},\ f_{mij} = \begin{cases} \delta_{ij},\ i,j = \overline{1,n}; \\ C_{1i}, i = \overline{1,n}, j = n+1; \\ b_{ij}, i = n+1, j = \overline{1,n}; \\ B_i, i = n+1, j = n+1. \end{cases}$$

$$\forall \mathrm{m} = \overline{1,\mathrm{n}}\ \det \mathrm{G_m} \geq 0;$$

$$G_m = (g_{mij})_{i,j=\overline{1,n+1}},\ g_{mij} = \begin{cases} \delta_{ij},\ i,j = \overline{1,n}; \\ C_{1i}, i = \overline{1,n}, j = n+1; \\ -\delta_{mj}, i = n+1, j = \overline{1,n}; \\ C_{1m}, i = n+1, j = n+1. \end{cases}$$

Отсюда легко следует утверждение теоремы.

Теорема 3. Пусть параметры модели закрытого рынка $\sigma_c \in \Sigma_c$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\forall \mathrm{m} = \overline{1,\mathrm{n}}\ \det \mathrm{F_m} = 0, (-1)^{\mathrm{n}} \det \mathrm{G_m} \geq 0,$$

где

$$F_m = (f_{mij})_{i,j=\overline{1,n+1}},\ f_{mij} = \begin{cases} \delta_{ij},\ i,j = \overline{1,n}; \\ C_{2i}, i = \overline{1,n}, j = n+1; \\ \tilde{E}_{ij} - E_{ij}, i = n+1, j = \overline{1,n}; \\ ln \frac{D_i^*}{S_i^*} + \sum_{j=1}^{n} \left(\tilde{E}_{ij} - E_{ij}\right) \ln p_j^*,\ i = n+1, j = n+1; \end{cases}$$

$$G_m = (g_{mij})_{i,j=\overline{1,n+1}},\ g_{mij} = \begin{cases} \delta_{ij},\ i,j = \overline{1,n}; \\ C_{2i}, i = \overline{1,n}, j = n+1; \\ \delta_{mj}, i = n+1, j = \overline{1,n}; \\ C_{2m}, i = n+1, j = n+1. \end{cases}$$

Тогда в модели σ_c существует вектор равновесных цен.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

2.2 Достаточные условия существования равновесия в модели открытого рынка

Введем обозначения:

$$\bar{\alpha}(\sigma) = \left[\max_{i=\overline{1,n}}\left(S_i^* \prod_{j=1}^{n}\left(p_j^*\right)^{-\tilde{E}_{ij}} \min\left\{c_{1j}^{\tilde{E}_{ij}}, c_{2j}^{-\tilde{E}_{ij}}\right\}\right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{c_{2k} - c_{1k}}{2} c_{2k}\left|\tilde{E}_{ki}^{-1}\right|\right]^{-1},$$

$$\bar{\beta}(\sigma) = \max_{i=\overline{1,n}}\left(D_i^* \prod_{j=1}^{n}\left(p_j^*\right)^{-E_{ij}} \max\left\{c_{2j}^{E_{ij}}, c_{1j}^{-E_{ij}}\right\}\right)\sum_{k=1}^{n} \frac{c_{2k} - c_{1k}}{2c_{1k}}|E_{ik}|,$$

$$\bar{\gamma}(\sigma) = \max_{i=\overline{1,n}}|S_i(\tilde{c}) + a_i - D_i(\tilde{c})|,$$

где E_{ij}^{-1} – элемент матрицы E^{-1}, обратной к матрице $\tilde{\mathcal{E}}$, $\tilde{c} = \frac{c_1+c_2}{2}$.

Теорема 4. Пусть параметры модели открытого рынка $\sigma_o \in \Sigma_o$ удовлетворяют условиям:

$\bar{\beta}(\sigma_o) < \bar{\alpha}(\sigma_o)$;

$$\bar{\gamma}(\sigma_o) < \bar{\alpha}(\sigma_o) - \bar{\beta}(\sigma_o).$$

Тогда в модели σ_0 существует вектор равновесных цен $p \in \mathbb{R}_+^n$, $c_1 \le p \le c_2$.

Для доказательства этой теоремы нам потребуются следующие определения и результаты из теории накрывающих отображений. Сформулируем их. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) – метрические пространства и Ψ, Φ – отображения, действующие из X в Y. В пространстве X через $B_X(x,r)$ обозначим замкнутый шар в точке x радиуса r, аналогично определим $B_Y(y,r)$ в пространстве Y.

Определение 3 (см. [13]). Отображение $\Psi: X \to Y$ называется α-накрывающим, если

$$\Psi\big(B_X(x,r)\big) \supseteq B_Y(\Psi(x), \alpha r)\ \forall x \in X, \forall r > 0.$$

Определение 4 (см. [13]). Отображение $\Psi: X \to Y$ называется метрически κ-регулярным, если $\forall x_0 \in X,\ y \in Y\ \exists x \in X: \Psi(x) = y$ и

$$\rho_X(x, x_0) \le \kappa \rho_Y\big(y, \Psi(x_0)\big).$$

Утверждение 1. Отображение Ψ является α-накрывающим тогда и только тогда, когда оно является метрически $1/\alpha$-регулярным.

Заметим, что отображения Ψ и Φ, очевидно, являются сюръективными. Нетрудно показать, что из свойств метрической регулярности непосредственно вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2. Пусть $\sigma \in \Sigma$, $\Psi: \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}^n$ является α-накрывающим, $\Phi: \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}^n$ является β-липшицевым, $\exists p^*, p^{**} \in \mathbb{R}_+^n$, $\Psi(p^*) = \Phi(p^*)$, $\Psi(p^{**}) = \Phi(p^*)$. Если $\Psi(p^*) = \Psi(p^{**})$, то $p^* = p^{**}$.

Доказательство. Действительно, если Ψ – α-накрывающее, то Ψ – метрически $1/\alpha$-регулярное и

$$\rho_X(p^*, p^{**}) \le \frac{1}{\alpha}\rho_Y\big(\Psi(p^*), \Psi(p^{**})\big) = 0$$

откуда, в силу свойств метрики, $p^* = p^{**}$.

Теорема 5 (см. Теорема 1 из [12]). Пусть пространство X полно и заданы $x_0 \in X$, $\alpha > 0$, $R > 0$. Пусть отображение $\Psi: X \to Y$ является α-накрывающим на $B_X(x_0, R)$ и замкнутым. Тогда для любого неотрицательного $\beta < \alpha$ и любого отображения $\Phi: B_X(x_0, R) \to Y$, удовлетворяющего условию Липшица с константой β такого, что

$$\rho_Y\big(\Psi(x_0), \Phi(x_0)\big) \le (\alpha - \beta)R,$$

для отображений Ψ и Φ существует точка совпадения $\xi \in X$, т.е. $\Psi(\xi) = \Phi(\xi)$, такая, что

$$\rho_Y(x_0, \xi) \le \frac{\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0))}{\alpha - \beta}.$$

Доказательство теоремы 4. Введем следующие обозначения. Через $\operatorname{cov}(S|M)$ обозначим точную верхнюю грань всех $\alpha > 0$ таких, что отображение S является α-накрывающим на множестве M. Через $\operatorname{lip}(D|M)$ обозначим точную нижнюю грань всех чисел $\beta \ge 0$ таких, что отображение D удовлетворяет на M условию Липшица с константой β. Тогда

$$\operatorname{lip}(D|M) = \sup_{p \in \operatorname{int} M} \left\| \frac{\partial D}{\partial p}(p) \right\|.$$

В пространстве $\mathbb{R}^n$ определим норму по формуле

$$\|x\|_1 = 2 \max_{j=\overline{1,n}} \frac{|x_j|}{c_{2j} - c_{1j}} \ \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|y\|_2 = \max_{j=\overline{1,n}} |y_j| \ \forall y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $X = \mathbb{R}_+^n, Y = \mathbb{R}^n$.Положим $M = B_X(\tilde{c}, 1)$. Очевидно, что $M = [c_{11}, c_{21}] \times \dots \times [c_{1n}, c_{2n}]$. Рассмотрим метрические пространства (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y), где метрики ρ_X и ρ_Y порождены нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ соответственно. Очевидно, что пространство $\mathbb{R}_+^n$ не является полным, однако нам будет достаточно полноты шара $B_X(\tilde{c}, 1)$.

Оценим $\operatorname{lip}(D|M)$. Для этого оценим сначала $\left\| \frac{\partial D}{\partial p}(p) \right\|$. Из формулы (2) следует, что

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_k} = \frac{D_i^* E_{ik}}{p_k} \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}}.$$

Тогда

$$\left\| \frac{\partial D}{\partial p}(p) \right\| = \max_{\|x\|=1} \left\| \frac{\partial D}{\partial p} x \right\| = \max_{\|x\|=1} \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial D}{\partial p_k} x_k \right| =$$

$$= \max_{\|x\|=1} \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{k=1}^n \left| x_k \frac{D_i^* E_{ik}}{p_k} \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}} \right| \le \max_{\|x\|=1} \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{k=1}^n |x_k| \frac{D_i^* |E_{ik}|}{p_k} \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}} \le$$

$$\le \max_{i=\overline{1,n}} \left(D_i^* \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}} \right) \sum_{k=1}^n \frac{c_{2k} - c_{1k}}{2p_k} |E_{ik}| \le$$

$$\le \max_{i=\overline{1,n}} \left(D_i^* \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} \max\left\{ c_{2j}^{E_{ij}}, c_{1j}^{-E_{ij}} \right\} \right) \sum_{k=1}^n \frac{c_{2k} - c_{1k}}{2c_{1k}} |E_{ik}| = \bar{\beta}(\sigma).$$

Теперь оценим $\operatorname{cov}(S|M)$. Согласно Утверждению 1, если отображение S является α-накрывающим, то обратное к нему отображение S^{-1} является $1/\alpha$-липшицевым. Оценку получим, исходя из этого соображения. Для начала найдем $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)^{-1}$. Согласно формуле (3), имеем

$$\frac{\partial S_i}{\partial p_k}(p) = \frac{\tilde{E}_{ik} S_i^*}{p_k} \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-\tilde{E}_{ij}} p_j^{\tilde{E}_{ij}}.$$

Тогда

$$\det \frac{\partial S}{\partial p}(p) = \begin{vmatrix} \tilde{E}_{11} S_1^* p_1^{-1} \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-\tilde{E}_{1j}} p_j^{\tilde{E}_{1j}} & \dots & \tilde{E}_{1n} S_1^* p_n^{-1} \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-\tilde{E}_{1j}} p_j^{\tilde{E}_{1j}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{E}_{n1} S_n^* p_1^{-1} \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-\tilde{E}_{nj}} p_j^{\tilde{E}_{nj}} & \dots & \tilde{E}_{nn} S_n^* p_n^{-1} \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-\tilde{E}_{nj}} p_j^{\tilde{E}_{nj}} \end{vmatrix} =$$

Вынесем за знак определителя из каждой строки множитель $S_i^* \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-\tilde{E}_{ij}} p_j^{\tilde{E}_{ij}}$, $i = \overline{1,n}$, а из каждого столбца – множитель p_i^{-1}, $i = \overline{1,n}$:

$$= \prod_{i=1}^n \left(S_i^* p_i^{-1} \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-\tilde{E}_{1j}} p_j^{\tilde{E}_{1j}} \right) \begin{vmatrix} \tilde{E}_{11} & \dots & \tilde{E}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{E}_{n1} & \dots & \tilde{E}_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n \left(S_i^* p_i^{-1} \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-\tilde{E}_{1j}} p_j^{\tilde{E}_{1j}} \right) \det \tilde{\mathcal{E}}.$$

Обозначим через $\mathcal{S}_{ik}$ алгебраическое дополнение элемента $\frac{\partial S_i}{\partial p_k}$ матрицы $\frac{\partial S}{\partial p}$, а через $\tilde{\mathcal{E}}_{ik}$ – элемента $\tilde{E}_{ik}$ матрицы $\tilde{\mathcal{E}}$. Тогда:

$$
\mathcal{S}_{ik}=(-1)^{i+k}\begin{vmatrix}
\frac{\partial S_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial S_1}{\partial p_{k-1}} & \frac{\partial S_1}{\partial p_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial S_1}{\partial p_n}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\frac{\partial S_{i-1}}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial S_{i-1}}{\partial p_{k-1}} & \frac{\partial S_{i-1}}{\partial p_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial S_{i-1}}{\partial p_n}\\
\frac{\partial S_{i+1}}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial S_{i+1}}{\partial p_{i-1}} & \frac{\partial S_{i+1}}{\partial p_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial S_{i+1}}{\partial p_n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\frac{\partial S_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial S_n}{\partial p_{k-1}} & \frac{\partial S_n}{\partial_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial S_n}{\partial p_n}
\end{vmatrix}=
$$

Аналогично предыдущим вычислениям вынесем за скобки множитель $S_l^*\prod_{j=1}^n\left(p_j^*\right)^{-\tilde{E}_{lj}}p_j^{\tilde{E}_{lj}}, l=\overline{1,n}, l\neq i$ из каждой строки и p_m^{-1} из каждого столбца, $m=\overline{1,n}, m\neq k$:

$$
=(-1)^{i+k}\left(\prod_{\substack{m=1\\m\neq k}}^n p_m^{-1}\right)\prod_{\substack{l=1\\l\neq i}}^n\left(S_l^*\prod_{j=1}^n\left(p_j^*\right)^{-\tilde{E}_{lj}}p_j^{-\tilde{E}_{lj}}\right)\begin{vmatrix}
\tilde{E}_{11} & \cdots & \tilde{E}_{1,k-1} & \tilde{E}_{1,k+1} & \cdots & \tilde{E}_{1n}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\tilde{E}_{i-1,1} & \cdots & \tilde{E}_{i-1,k-1} & \tilde{E}_{i-1,k+1} & \cdots & \tilde{E}_{i-1,n}\\
\tilde{E}_{i+1,1} & \cdots & \tilde{E}_{i+1,k-1} & \tilde{E}_{i+1,k+1} & \cdots & \tilde{E}_{i+1,n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\tilde{E}_{n1} & \cdots & \tilde{E}_{n,k-1} & \tilde{E}_{n,k+1} & \cdots & \tilde{E}_{nn}
\end{vmatrix}=
$$

$$
=\left(\prod_{\substack{m=1\\m\neq k}}^n p_m^{-1}\right)\prod_{\substack{l=1\\l\neq i}}^n\left(S_l^*\prod_{j=1}^n\left(p_j^*\right)^{-\tilde{E}_{lj}}p_j^{-\tilde{E}_{lj}}\right)\tilde{\mathcal{E}}_{ik}.
$$

Таким образом,

$$
\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)^{-1}_{ki}=\left(\det\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)\right)^{-1}\mathcal{S}_{ik}=\frac{\left(\prod_{\substack{m=1\\m\neq k}}^n p_m^{-1}\right)\prod_{\substack{l=1\\l\neq i}}^n\left(S_l^*\prod_{j=1}^n\left(p_j^*\right)^{-\tilde{E}_{lj}}p_j^{-\tilde{E}_{lj}}\right)\tilde{\mathcal{E}}_{ik}}{\prod_{i=1}^n\left(S_i^*p_i^{-1}\prod_{j=1}^n\left(p_j^*\right)^{-\tilde{E}_{1j}}p_j^{\tilde{E}_{1j}}\right)\det\tilde{\mathcal{E}}}=
$$

$$
=\left(p_k^{-1}S_i^*\prod_{j=1}^n\left(p_j^*\right)^{-\tilde{E}_{ij}}p^{\tilde{E}_{ij}}\right)^{-1}\frac{\tilde{\mathcal{E}}_{ik}}{\det\tilde{\mathcal{E}}}=\left(p_k^{-1}S_i^*\prod_{j=1}^n\left(p_j^*\right)^{-\tilde{E}_{ij}}p^{\tilde{E}_{ij}}\right)^{-1}\tilde{E}_{ki}^{-1},
$$

где $\tilde{E}_{ik}^{-1}$ – элемент матрицы $\tilde{E}^{-1}$, обратной к $\tilde{E}$.

Теперь мы можем перейти к получению оценки константы Липшица отображения $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)^{-1}$:

$$
\left\|\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)^{-1}\right\|=\max_{\|x\|=1}\max_{i=\overline{1,n}}\sum_{k=1}^n\left\|\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)^{-1}x\right\|=\max_{\|x\|=1}\max_{i=\overline{1,n}}\sum_{k=1}^n\left|\left(p_k^{-1}S_i^*\prod_{j=1}^n\left(p_j^*\right)^{-\tilde{E}_{ij}}p^{\tilde{E}_{ij}}\right)^{-1}\tilde{E}_{ki}^{-1}x_k\right|\leq
$$

$$
\leq\max_{\|x\|=1}\max_{i=\overline{1,n}}\left(S_i^*\prod_{j=1}^n\left(p_j^*\right)^{-\tilde{E}_{ij}}p^{\tilde{E}_{ij}}\right)^{-1}\sum_{k=1}^n\left|p_k\tilde{E}_{ki}^{-1}x_k\right|\leq
$$

$$
\leq\max_{i=\overline{1,n}}\left(S_i^*\prod_{j=1}^n\left(p_j^*\right)^{-\tilde{E}_{ij}}\max\left\{c_{1j}^{\tilde{E}_{ij}},c_{2j}^{\tilde{E}_{ij}}\right\}\right)^{-1}\sum_{k=1}^n\frac{c_{2k}-c_{1k}}{2}c_{2k}\left|\tilde{E}_{ki}^{-1}\right|=\frac{1}{\bar{\alpha}(\sigma)}.
$$

По предположениям теоремы 1) и 2) и неравенств $\operatorname{cov}(S|M)\geq\bar{\alpha}(\sigma)$, $\operatorname{lip}(D|M)\leq\bar{\beta}(\sigma)$ следует, что, существуют положительный числа α,β такие, что $\bar{\beta}(\sigma)<\beta<\alpha<\bar{\alpha}(\sigma)$, отображение S является α-накрывающим на множестве M, а отображение D является β-липшицевым на множестве M. Поскольку $\rho_Y\left(S(\tilde{c})+a,D(\tilde{c})\right)=\bar{\gamma}$, из предположения 2) теоремы следует, что $\rho_Y\left(S(\tilde{c})+a,D(\tilde{c})\right)<\alpha-\beta$. Таким образом, существует вектор $p\in X$ такой, что $D(p)=S(p)+a$ и

$$
\rho_X(p,\tilde{c})\leq\frac{1}{\alpha-\beta}\rho_Y\left(S(\tilde{c})+a,D(\tilde{c})\right).
$$

Из последнего неравенства следует, что $p\in\operatorname{int}M$, поскольку $M=B_X(\tilde{c},1)$, а $\rho_Y\left(S(\tilde{c})+a,D(\tilde{c})\right)<\alpha-\beta$. Поэтому $c_{1j}<p_j<c_{2j}, j=\overline{1,n}$.

Заключение

Исследованы модели рынка (закрытая и открытая) на предмет существования положения равновесия. Для закрытой модели получены легко проверяемые численно необходимые и достаточные условия существования вектора равновесных цен как следствия теорем о совместности и систем линейных уравнений и неравенств. Для открытой модели получены в виде условий на параметры (также легко проверяемых на практике) достаточные условия равновесия. Эти условия получены как следствия теорем о точках совпадения накрывающего и липшицевого отображений. Полученные результаты могут быть применены для исследования мощности множества положений равновесия, а также для их численного поиска.

Литература

1. *A. Smith.* An Inquiry into the Nature and Cause of the Wealth of Nations. 2 Vols. – London, 1776.
2. *L. Walras.* Elements d`Economie Politique Pure. – Lausanne, 1874.
3. *K.J. Arrow, G. Debreu.* Existence of an equilibrium for a competitive economy // Econometrica, 1954, v.22, №3
4. *Арутюнов А.В.* Точки совпадения двух отображений. – Функциональный анализ и его приложения, 2014. – Т. 48. – Вып. 1. – С.89-93.
5. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Существование обратных отображений и их свойства. – Труды МИАН, 2010. – т. 271. – С. 18-28.
6. *A. V. Arutyunov, N. G. Pavlova, A. A. Shananin.* New conditions for the existence of equilibrium prices. – Yugosl. J. Oper. Res., 2018. – 28:1. – pp. 59-77
7. *A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, N. G. Pavlova.* Equilibrium price as a coincidence point of two mappings. – Comput. Math. Math. Phys., 2013. – 53:2. – pp. 158-169.
8. *A. V. Arutyunov, N. G. Pavlova, A. A. Shananin*, New conditions for the existence of equilibrium prices, Yugoslav Journal of Operations Research, 28:1 (2018), 59–77
9. *N. G. Pavlova*, Applications of the Theory of Covering Maps to the Study of Dynamic Models of Economic Processes with Continuous Time, Mathematical Analysis With Applications (CONCORD-90, Ekaterinburg, Russia 2018), Springer Proc. in Math. & Stat., 318, Springer, 2020, 123–129.
10. *Pavlova, N., Zhukovskaya, Z., Zhukovskiy, S.* Equilibrium in continuous dynamic market models. Proceedings of 2020 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), STAB 2020, 2020, 9140586
11. *Арутюнов А.В.* Итерационный метод нахождения точек совпадения двух отображений. – Журнал вычислительной математики и математической физики, 2012. – т. 52. – №11. – с. 1947–1950.
12. *Черников С. Н.* Системы линейных неравенств, УМН, 1953, том 8, выпуск 2(54), 7–73.
13. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points. J. Fixed Points Theory and Applications. 2009. V. 5. №1. P. 5–16.