

# СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ПУТЕВОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ КОЛЕСНОГО РОБОТА ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНЕШНЕГО НЕКОНТРОЛИРУЕМОГО ВОЗМУЩЕНИЯ<sup>36</sup>

Кокунько Ю.Г., Краснова С.А.

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,  
Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная, д.65  
juliakokunko@gmail.com, skrasnova@list.ru*

*Аннотация: Для решения задачи путевой стабилизации мобильного робота на плоскости с учетом ограничений на переменные состояния и управления разработана декомпозиционная процедура синтеза линейных и нелинейных обратных связей, стабилизирующая линейное и угловое отклонения от заданной кривой инвариантно по отношению к внешним возмущениям. Приведены результаты моделирования.*

Ключевые слова: мобильный робот, путевая стабилизация, инвариантность, декомпозиция, сигма-функция.

## Введение

На современных складах, во многих производствах, при выполнении задач гражданского и военного назначения в настоящее время активно используются беспилотные транспортные средства и мобильные роботы, их функции и выполняемые рабочие сценарии постоянно расширяются. В данной работе в качестве объекта управления рассматривается беспилотная трехколесная платформа, которая движется без проскальзывания, два задних колеса являются ведущими, переднее колесо является поворотным. Ее математическая модель имеет четвертый порядок без учета динамики исполнительных приводов, скалярным управлением выступает угловая скорость переднего колеса. На систему по одному каналу с управлением воздействует внешнее возмущение, которое полагается неизвестной ограниченной функцией времени. Ставится задача синтеза закона управления в форме обратной связи, обеспечивающего вывод базовой точки платформы, которая расположена в середине задней оси, на целевую траекторию и ее движение в малом пограничном слое вдоль заданной кривой.

Даже такое простое транспортное средство является достаточно сложным объектом автоматического управления [1-3]. При решении задачи следования вдоль заданного пути один из подходов заключается в том, что кинематическая модель объекта управления переписывается относительно путевых координат с их дальнейшей стабилизацией [4-9]. К путевым координатам относятся: натуральный параметр (длина дуги) для целевой точки заданной траектории, ближайшей к роботу; расстояние от базовой точки до заданной траектории; угол между центральной линией платформы и касательным вектором к заданной кривой в целевой точке; угол поворота переднего колеса. Полученная система дифференциальных уравнений отличается высокой степенью нелинейности и нестационарности. Для того чтобы свести синтез к стандартным процедурам, в ряде работ [7-9] предложен переход к каноническим переменным. При этом дифференцирование по времени заменяется дифференцированием по виртуальной независимой переменной, в которой учитывается линейная скорость базовой точки платформы. Такой подход позволяет, во-первых, рассматривать объекты управления не только с постоянной, но и с переменной скоростью. Во-вторых, появляется возможность с помощью нелинейного закона управления осуществить точную линеаризацию и получить замкнутую систему с матрицей Фробениуса. Выбором коэффициентов ее характеристического полинома обеспечивается асимптотическая устойчивость линейного и углового отклонения от заданной кривой, что и решает поставленную задачу. Следует отметить, что синтезированные в рамках этого подхода законы управления, с одной стороны, приводят к простому и понятному виду замкнутой виртуальной системы. Но, с другой стороны, сами законы очень громоздкие, поскольку основаны на компенсации всех нелинейных составляющих, полученных в результате дифференцирования при переходе к каноническим переменным. Данные функции содержат тригонометрические члены, значения которых необходимо вычислять в реальном времени на бортовом компьютере, где не всегда достаточно ресурсов для выполнения расчетов высокой точности. Кроме того, в законах, основанных на компенсации нелинейных составляющих математической модели, требуется также высокое качество измерений переменных состояния объекта или путевых переменных, что также не всегда выполнимо на практике [10]. Еще одна проблема, которую очень трудно обеспечить в канонической системе, линеаризованной обратной

<sup>36</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-01-00363А).

связью, связана с необходимостью учитывать ограничения на переменные состояния, которые обусловлены физикой процесса. Их невыполнение может привести к аварийной ситуации. В работе [9] рассматривался вопрос ограничения управления с помощью линейной функции с насыщением, которая не является всюду гладкой и имеет особые точки, в которых ее производная терпит разрыв. Учитывая, что в качестве управления в данной механической системе рассматривается скорость переднего колеса, то для ее ограничения предпочтительнее использовать гладкую функцию.

Представленное в данной работе решение задачи путевой стабилизации опирается на результаты работ [7-9] в части перехода к путевым координатам. Но полное каноническое представление и линеаризация обратной связью не используются. На основе математической модели, записанной относительно путевых координат, в рамках блочного подхода разработана декомпозиционная процедура синтеза смешанных линейных и нелинейных сигмоидальных обратных связей. Последние являются гладкими аналогами линейных функций с насыщениями. В работах [11-15] показано, что применение всюду ограниченных, гладких обратных связей в виде сигма-функций позволяет учитывать на стадии синтеза имеющиеся ограничения не только на управление, но и на переменные состояния, которые используются в качестве фиктивных управлений. Кроме того, в замкнутой системе обеспечивается инвариантность регулируемых переменных по отношению к неизвестным ограниченному возмущению, действующим по одним каналам с фиктивными и истинными сигмоидальными управлениями. Таким образом, данный подход привносит в замкнутую систему преимущества, характерные для систем с разрывными управлениями, функционирующих в скользящем режиме [16-19]. Заметим, что разрывные управления правомерно использовать только при формировании истинного управления в электрических исполнительных устройствах. Замена функции знака ее гладким аналогом в виде сигма-функции расширяет область применения таких принципов управления. В данной работе последовательное формирование сигмоидальных локальных связей и сигмоидального закона управления нацелено на то, чтобы подавлять, а не компенсировать имеющиеся нелинейности и внешнее возмущение, что снижает вычислительную сложность закона управления по сравнению с методами линеаризации обратной связью [7-9]. Настройка параметров регулятора осуществляется на основе неравенств, поэтому в рамках представленного в данной статье подхода допускается наличие погрешностей в измерениях переменных состояния и/или путевых координат.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 1 дано описание математической модели объекта управления и ее представление в путевых координатах [7-9]. В разделе 2 на основе этого представления разработана блочная процедура синтеза линейных и сигмоидальных обратных связей с учетом имеющихся ограничений на переменные состояния и управление, обеспечивающая инвариантность по отношению к внешнему возмущению и стабилизацию линейного и углового отклонения от заданной кривой с некоторой точностью. В разделе 3 приведены результаты моделирования разработанных алгоритмов, подтверждающие эффективность предложенного подхода к решению задачи путевой стабилизации.

## 1 Описание объекта и закона управления

Математическая модель движения трехколесной платформы без учета динамики исполнительных приводов представлена следующими кинематическими соотношениями в неподвижной системе декартовых координат  $xOy$  [6-9]:

$$\begin{aligned} \dot{X}_c &= V \cos \theta, \\ \dot{Y}_c &= V \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= V \operatorname{tg} \phi / l, \\ \dot{\phi} &= \eta + u, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $X_c(t), Y_c(t)$  – координаты базовой точки  $C$ , которая расположена в середине задней оси платформы (см. рис. 1);  $\theta$  – угол между осью  $Ox$  и центральной линией платформы, которая совпадает с направлением вектора скорости (ориентация платформы относительно неподвижной

системы координат);  $\phi$  – угол поворота переднего колеса;  $l = \text{const} > 0$  – расстояние между задними и передними колесами;  $u$  – скалярное непрерывное управление, в качестве которого выступает угловая скорость переднего колеса, которая, в свою очередь, регулируется рулевым приводом.

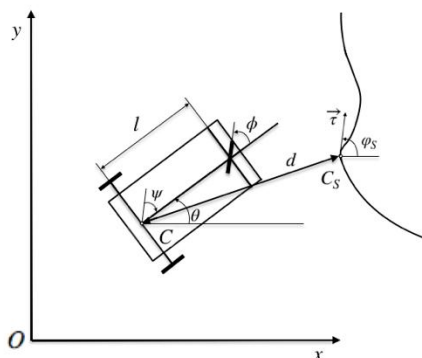


Рис. 1. Положение колесного робота относительно заданной траектории движения

В системе (1)  $\eta(t)$  – неизвестная функция времени, которая трактуется как внешнее возмущение, ограниченное известной константой:

$$|\eta(t)| \leq \bar{\eta}, t \geq 0 \quad \bar{\eta} = \text{const} > 0; \quad (2)$$

$V(t) > 0$  – линейная скорость базовой точки платформы, которая регулируется по независимому контуру. Поскольку в данной работе в качестве математической модели рассматриваются только кинематические соотношения робота, постольку задача управления линейной скоростью не ставится и не решается. Для упрощения изложения основного результата будем полагать, что линейная скорость является положительной постоянной и известной величиной. Ограничения на постоянство скорости снимаются при рассмотрении полной модели с учетом динамики всех исполнительных приводов [3].

Заметим, что модель (1) можно использовать и для описания движения платформы с двумя поворотными колесами, если рассматривать  $\phi$  как эффективное среднее углов поворота передних колес [6-7].

Для системы (1)-(2) рассматривается задача путевой стабилизации, а именно, задача синтеза закона управления в форме обратной связи, обеспечивающего вывод базовой точки на целевую (допустимую) траекторию и ее движение вдоль заданной кривой.

Отклонение объекта от кривой обычно понимается как отклонение базовой точки от ближайшей к нему точки кривой, которую называют целевой точкой  $C_s$  (см. рис. 1). Для решения задачи стабилизации линейного и углового отклонения от заданной кривой переходят к записи системы (1) относительно путевых координат [6-9]:

$d$  – расстояние от базовой точки платформы  $C$  до заданной траектории движения (расстояние со знаком плюс, если базовая точка находится слева от кривой при движении в положительном направлении, и со знаком минус, если справа);

$\psi$  – угол между центральной линией платформы и касательным вектором к заданной кривой в целевой точке, ближайшей к базовой точке платформы (угловое отклонение);

$\phi$  – угол поворота переднего колеса;

$s$  – значение натурального параметра (длина дуги) для точки заданной кривой, ближайшей к роботу, которую будем называть целевой точкой  $C_s$ .

В путевых координатах система уравнений движения колесного робота принимает следующий вид [6-9]:

$$\begin{aligned}
\dot{d} &= V \sin \psi, \\
\dot{\psi} &= \frac{V \operatorname{tg} \phi}{l} - \frac{V k \cos \psi}{1 - kd} \\
\dot{\phi} &= \eta + u, \\
\dot{s} &= \frac{V \cos \psi}{1 - kd},
\end{aligned} \tag{3}$$

где  $k := k(s)$  – кривизна заданной траектории в целевой точке. При выполнении условий  $kd \neq 1$ ,  $V(t) > 0$  переход от системы (1) к системе (3) и обратно является диффеоморфным [6], что позволяет использовать систему (3) в качестве основы для синтеза закона управления в задаче путевой стабилизации. Предполагается, что все внутренние и внешние переменные, необходимые для синтеза обратной связи, либо измеряются, либо могут быть вычислены на основе имеющихся измерений. Проблема оценивания внешнего возмущения  $\eta(t)$  и, следовательно, его компенсации, не ставится.

На путевые переменные, а также на управление системы (1) имеются следующие ограничения

$$|\psi(t)| < \pi/2, |\operatorname{tg} \psi| \leq \bar{\psi}, |\phi(t)| < \pi/2, |\operatorname{tg} \phi| \leq \bar{\phi}, |u(t)| \leq \bar{u}, t \geq 0, \tag{4}$$

которые надо выполнить в процессе управления. Естественно предположить, что начальные условия в системе (3) заведомо удовлетворяют ограничениям (4) и

$$\bar{\psi} < \bar{\phi}, \bar{\eta} < \bar{u}, . \tag{5}$$

Допустимость целевой траектории, которая задана параметрически  $X(s), Y(s)$ , означает, что указанные функции дважды дифференцируемы и кривизна

$$k(s) = \frac{X'(s)Y''(s) - Y'(s)X''(s)}{[(X'(s))^2 + (Y'(s))^2]^{3/2}}$$

является кусочно-непрерывной, ограниченной функцией:  $|k(s)| \leq \bar{\phi}$ ,  $kd \neq 1$ .

Особенность системы (3) состоит в том, что правые части первых трех дифференциальных уравнений не зависят явно от натурального параметра заданной траектории  $s$ . Учитывая, что переменная  $s$  не является стабилизируемой, далее рассматриваются только первые три уравнения системы (3). Ставится задача синтеза закона управления в форме обратной связи, обеспечивающего стабилизацию линейного  $d(t)$  и углового  $\psi(t)$  отклонений от заданной траектории. Учитывая воздействие на систему (3) внешнего неконтролируемого возмущения, не подлежащего компенсации, в замкнутой системе с непрерывным управлением стабилизации регулируемых переменных возможна только с некоторой точностью:

$$|d(t)| \leq \Delta_1, t \geq t_1 > t_2, |\psi(t)| \leq \Delta_2, t \geq t_2 > 0. \tag{6}$$

Выполнение условий (6) обеспечит вывод базовой точки платформы на целевую траекторию и ее движение в малом пограничном слое вдоль заданной кривой при  $t \geq t_1$ .

В области  $|\psi(t)| < \pi/2$ ,  $|\phi(t)| < \pi/2$  и при  $V = \operatorname{const} > 0$ ,  $kd \neq 1$  подсистема, состоящая из первых трех уравнений системы (3), является, очевидно, управляемой и имеет вид нелинейной блочной формы управляемости [19], в которой внешнее возмущение  $\eta(t)$  действует по одному каналу с управлением. Следовательно, можно подавить с некоторой точностью его воздействие на объект управления с помощью подходящего выбора обратной связи.

В следующем разделе в рамках блочного подхода разработана декомпозиционная процедура синтеза нелинейной обратной связи с учетом ограничений на переменные состояния и управления (4), обеспечивающая подавление внешнего возмущения и решение поставленной задачи (6).

## 2 Декомпозиционная процедура синтеза нелинейной обратной связи

Блочный принцип управления для систем, представленных в блочной форме управляемости, заключается в последовательном, сверху вниз, формировании локальных связей, которые обеспечиваются в итоге выбором истинного управления. При этом в каждом текущем блоке переменные следующего блока трактуются как фиктивные управления, которые стандартно выбираются в виде линейных стабилизирующих функций [19]. Но использование больших

коэффициентов усиления, необходимых для подавления внешних возмущений, приведет к всплескам регулируемых переменных вначале переходных процессах, что недопустимо в практических приложениях. Другой способ обеспечения инвариантности – организация скользящего режима с помощью разрывных управлений с ограниченными амплитудами, обеспечивают ограниченность обратной связи. Но разрывные управления из-за физических ограничений не могут быть использованы для формирования локальных обратных связей, а также в данном случае для формирования истинного управления, в качестве которого выступает угловая скорость переднего колеса. Для учета ограничений на переменные состояния и управления, а также для подавления внешнего возмущения в данной работе используются ограниченные нелинейные сигмоидальные обратные связи [11-15], реализуемые в качестве фиктивных управлений.

Предварительно рассмотрим особенности используемой сигма-функции, которая имеет следующий вид:  $\sigma(k_0x) = 2/(1+e^{-k_0x}) - 1$ ,  $x \in R$ , множитель  $k_0 = \text{const} > 0$  в аргументе играет роль большого коэффициента усиления в малой окрестности нуля. Сигма-функцию можно рассматривать как гладкую реализацию функции знака  $y = \text{sign}(x)$  в следующем смысле:

$$\sigma(-k_0x) = -\sigma(k_0x), \sigma(-k_0x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} k_0x/2, \sigma(k_0x) \underset{k_0 \rightarrow +\infty}{\sim} \text{sign}(x).$$

Для сигма-функции и ее производной  $\sigma'(k_0x) = 0,5k_0(1 - \sigma^2(k_0x))$  справедливы следующие оценки:

$$\sigma(k_0\Delta) < |\sigma(k_0x)| < 1, |x| > \Delta > 0;$$

$$\frac{\sigma(k_0\Delta) |x|}{\Delta} \leq |\sigma(k_0x)| \leq \sigma(k_0\Delta); 0 < \sigma'(k_0\Delta) \leq \sigma'(0) = \frac{k_0}{2}, |x| \leq \Delta. \quad (7)$$

Из неравенств (7) видно, что при  $|x| \leq \Delta$  сигма-функцию снизу можно оценить линейной функцией, а при  $|x| > \Delta$  – постоянной функцией. Для формализации границы данного разделения вводится параметрическая связь  $k_0\Delta = c = \text{const} > 0$  [11-15], где интервал для выбора параметра  $c \in [1,3; 3]$  снизу ограничен абсциссой точки перегиба производной первого порядка  $\sigma'''(1,3) = 0$  при  $x > 0$ , а сверху – абсциссой вершины сигма-функции, в которой ее кривизна достигает максимума при  $x > 0$  (симметрично при  $x < 0$ ). Для дальнейших построений примем в качестве значения параметра  $c$  верхнюю границу указанного диапазона:

$$k_0\Delta = c = 3, \sigma(\pm 3) \approx \pm 0,9, \sigma'(\pm 0,9) \approx \pm 0,095k_0. \quad (8)$$

Ниже на основе первых трех уравнений системы (3) представлена пошаговая процедура блочного синтеза сигмоидального управления с формированием как линейных, так и сигмоидальных локальных связей. В качестве фиктивных управлений в первом и во втором уравнениях принимаются угловые переменные  $\psi$  и  $\phi$  соответственно. Сначала мы последовательно, сверху вниз, сформируем функциональные зависимости локальных связей и управления, а потом формализуем неравенства для выбора параметров регулятора.

Шаг 1. В первом уравнении системы (3) внешнее возмущение отсутствует. В качестве фиктивного управления рассматривается ограниченная функция  $V \sin \psi$ , поэтому здесь можно сформировать линейную локальную связь. Обозначим

$$e_1 := d, e_2 = V \sin \psi + k_1 e_1, \quad (9)$$

где  $e_2$  – невязка между фактическим и желаемым фиктивным управлением. От выбора коэффициента усиления  $k_1 = \text{const} > 0$  зависит скорость и точность стабилизации первой регулируемой переменной  $e_1 := d$ , для которой в силу (3) дифференциальное уравнение, замкнутое локальной связью (9), принимает вид

$$\dot{e}_1 = -k_1 e_1 + e_2. \quad (10)$$

Шаг 2. В силу (3) составим дифференциальное уравнение относительно невязки (9):

$$\dot{e}_2 = \frac{V^2 \cos \psi}{l} \left( \text{tg} \phi - \frac{lk \cos \psi}{1 - kd} + \frac{lk_1 \text{tg} \psi}{V} \right), \quad (11)$$

где множитель  $V^2 \cos \psi / l > 0$ , если  $|\psi(t)| < \pi/2$ . В данной подсистеме в качестве фиктивного управления рассматривается неограниченная функция  $\operatorname{tg} \phi$ . Для упрощения вычислительной реализации итогового закона управления предлагается не компенсировать с помощью фиктивного управления нелинейные составляющие правой части уравнения (11). Для того чтобы ограничить фиктивное управление, введем сигмоидальную стабилизирующую локальную связь

$$e_3 = \operatorname{tg} \phi + m_2 \sigma(k_2 e_2), \quad (12)$$

где  $e_3$  – невязка между фактическим и желаемым фиктивным управлением. Выбор  $m_2 = \operatorname{const} > 0$  обеспечивает желаемую скорость, а выбор  $k_2 = \operatorname{const} > 0$  – желаемую точность стабилизации  $e_2$  и, следовательно, второй регулируемой переменной  $\psi(t)$  (9). Дифференциальное уравнение (11), замкнутое локальной связью (12), принимает вид

$$\dot{e}_2 = \frac{V^2 \cos \psi}{l} \left( -m_2 \sigma(k_2 e_2) - \frac{lk \cos \psi}{1 - kd} + \frac{lk_1 \operatorname{tg} \psi}{V} + e_3 \right). \quad (13)$$

Шаг 3. В силу (3) составим дифференциальное уравнение относительно невязки (12):

$$\dot{e}_3 = \frac{1}{\cos^2 \phi} (\eta + 0,5 \cos^2 \phi \cdot m_2 k_2 (1 - \sigma^2(k_2 e_2)) \dot{e}_2 + u), \quad (14)$$

где также как и в предыдущей системе сформируем чисто сигмоидальный закон управления

$$u = -m_3 \sigma(k_3 e_3), \quad (15)$$

где выбор  $m_3 = \operatorname{const} > 0$  обеспечивает желаемую скорость, а выбор  $k_3 = \operatorname{const} > 0$  – желаемую точность стабилизации невязки  $e_3$  (12).

В итоге в силу (10), (13)-(15), имеем замкнутую систему относительно невязок, которую приведем еще раз в целостном виде для удобства изложения:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -k_1 e_1 + e_2, \\ \dot{e}_2 &= \frac{V^2 \cos \psi}{l} \left( -m_2 \sigma(k_2 e_2) - \frac{lk \cos \psi}{1 - kd} + \frac{lk_1 \operatorname{tg} \psi}{V} + e_3 \right), \\ \dot{e}_3 &= \frac{1}{\cos^2 \phi} (-m_3 \sigma(k_3 e_3) + \eta + 0,5 \cos^2 \phi \cdot m_2 k_2 (1 - \sigma^2(k_2 e_2)) \dot{e}_2). \end{aligned} \quad (16)$$

Обратим внимание, что вид замкнутой системы (16) достаточно громоздкий по сравнению с линеаризованной с помощью обратной связи канонической системы [7-9]. Но, с другой стороны, здесь получен менее громоздкий закон управления (15), который относительно путевых координат имеет следующую запись

$$u = -m_3 \sigma[k_3 (\operatorname{tg} \phi + m_2 \sigma(k_2 (V \sin \psi + k_1 d)))] \quad (17)$$

Еще одно преимущество заключается в возможности на стадии синтеза учитывать имеющиеся ограничения на переменные состояния (4), а также обеспечить подавление неконтролируемого возмущения с помощью ограниченного по модулю управления. Продемонстрируем этот факт с помощью нижеследующей упрощенной системы неравенств для выбора параметров закона управления (17) (без учета начальных значений путевых переменных и времени затухающих собственных движений невязок замкнутой системы (16)).

Согласно идеологии блочного синтеза, выбором параметров регулятора (17) в замкнутой системе (16) нужно обеспечить следующее поведение переменных во времени:

$$|e_3(t)| \leq c/k_3 \leq \Delta_3 \quad (t \geq t_3 > 0) \Rightarrow |e_2(t)| \leq c/k_2 \leq \bar{\Delta}_2 \quad (t \geq t_2 > t_3) \Rightarrow |e_1(t)| \leq \Delta_1 \quad (t \geq t_1 > t_2), \quad (18)$$

где  $\bar{\Delta}_2 \geq V \Delta_2$ . Еще раз подчеркнем, что проблема обеспечения заданного времени сходимости в работе не рассматривается. В неравенствах (18) указанные моменты времени введены для формализации последовательности сходимости невязок в указанные окрестности нуля. Выполнение (18) в силу (9), (12) и с учетом  $\sin \psi \underset{\psi \rightarrow 0}{\sim} \psi$ ,  $\operatorname{tg} \phi \underset{\phi \rightarrow 0}{\sim} \phi$  обеспечит выполнение поставленной задачи (6).

Процедура выбора параметров основана на достаточных условиях второго метода Ляпунова [11-15]. Для системы (16) введем положительно определенную функцию в виде следующей суммы квадратов невязок:

$$\bar{V} = V_1 + V_2 + V_3, V_i = \frac{1}{2} e_i^2, i = 1, 2, 3. \quad (19)$$

С учетом (2), (4)-(5), (7)-(8), а также  $|\dot{e}_2(t)| \leq 2V^2 m_2 / l, t \geq 0$ , вне указанных окрестностей нуля (18) и в указанные интервалы времени для производных слагаемых функции Ляпунова (19), составленных в силу уравнений (16), справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= e_1 \dot{e}_1 = e_1(-k_1 e_1 + e_2) \leq |e_1|(\Delta_2 - k_1 |e_1|) < 0, t \geq t_2 > t_3, \\ \dot{V}_2 &= e_2 \dot{e}_2 \leq V^2 |e_2| \left( \frac{lk}{|1-kd|} + \frac{lk_1 \bar{\psi}}{V} + \Delta_3 - 0,9m_2 \right) / l < 0, t \geq t_3, \\ \dot{V}_3 &= e_3 \dot{e}_3 \leq |e_3|(-0,9m_3 + \bar{\eta} + m_2^2 k_2 V^2 / l) / \cos^2 \phi < 0, t \geq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (8) и оценок (20) следует, что неравенства (18) будут выполнены при следующем выборе параметров регулятора:

$$\begin{aligned} 1,1 \left( \frac{lk}{|1-kd|} + \frac{lk_1 \bar{\psi}}{V} + \Delta_3 \right) &< m_2 \leq \bar{\phi}, \\ 1,1(\bar{\eta} + m_2^2 k_2 V^2 / l) &< m_3 \leq \bar{u}; \end{aligned} \quad (21)$$

$$k_3 \geq 3 / \Delta_3, k_2 \geq 3 / \Delta_2, k_1 \geq \bar{\Delta}_2 / \Delta_1. \quad (22)$$

Как видно из неравенств (21), применение блочного метода синтеза позволило дополнительно к (5) в явном виде получить перекрестные зависимости между ограничениями на переменные состояния и управления, которыми надо руководствоваться на этапе проектирования системы управления и планирования целевых траекторий, а именно:

$$\frac{lk}{|1-kd|} + \frac{l\bar{\psi}}{V} < \bar{\phi}, \bar{\eta} + \bar{\phi}^2 V^2 / l < \bar{u}. \quad (23)$$

Если неравенства (23) изначально не выполняются, то постановку задачи путевой стабилизации с требованием выполнить ограничения (4) следует признать некорректной.

Если неравенства (23) априори выполняются, то тогда из разницы между верхними и нижними границами неравенств (21) последовательно определяются допустимые значения параметров регулятора (17) [14]. При выбранных допустимых коэффициента усиления  $k_i, i = 1, 2, 3$  из обратных соотношений (22) следует предельно достижимая точность стабилизации регулируемых переменных (6), которую можно обеспечить в замкнутой системе при наличии ограничений на переменные состояния и управления в рамках используемого метода синтеза.

### 3 Результаты моделирования

Моделирование разработанных алгоритмов проводилось в среде MATLAB-Simulink. Для реализации закона управления (17) использовались текущие значения  $\phi(t), \psi(t)$ , которые вычислялись на основе измерений  $X_C(t), Y_C(t), \theta(t)$  [6]. Был также составлен и программно реализован алгоритм для минимизации функций методом золотого сечения с целью вычисления отклонения базовой точки  $C$  от целевой кривой  $d(t)$  и параметра  $s(t)$  заданной кривой.

Для численного моделирования движения колесного робота в качестве примера рассматривалось движение по окружности с радиусом равным 3:

$$X_s(s) = 3 \sin(s/3), Y_s(s) = 3 \cos(s/3); \quad (24)$$

внешнее возмущение моделировалось гладкой функцией времени  $\eta = 0,2 \sin(t)$ ; параметры регулятора (17) были приняты на основе неравенств (21)-(22) в виде

$$m_2 = 27, m_3 = 100, k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1. \quad (25)$$

На рис. 2 показан процесс сходимости базовой точки платформы  $C(X_C(t), Y_C(t))$  к заданной кривой (24) с целевой точкой  $C_s(X_s(t), Y_s(t))$ . Точность стабилизации при выбранных параметрах (25)

в условиях действия внешнего неконтролируемого возмущения составила примерно 2,5 см, что является допустимым для габаритных колесных роботов.

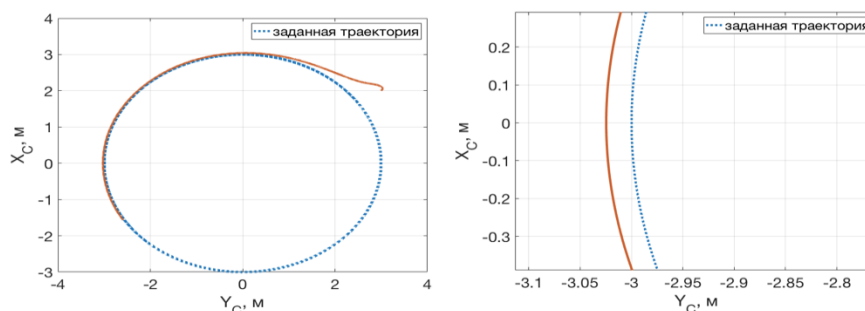


Рис. 2. Процесс сходимости базовой точки трехколесной платформы к заданной траектории (24)

## Заключение

Для решения задачи путевой стабилизации трехколесной беспилотной платформы разработана декомпозиционная процедура синтеза нелинейного закона управления по путевым координатам. В отличие от известных методов синтеза линеаризующей обратной связи на основе канонических представлений математической модели в данной работе получен более простой в вычислительной реализации закон управления. Применение блочного метода синтеза позволило установить необходимые соотношения между ограничениями на переменные состояния и управления, выполнение которых определяет корректность постановки и возможность выполнения задачи путевой стабилизации. Применение всюду ограниченных, гладких обратных связей в виде сигма-функций позволило учитывать имеющиеся ограничения на переменные состояния и управления на стадии синтеза, а также обеспечило в замкнутой системе инвариантность по отношению к неизвестному ограниченному возмущению, действующему в пространстве управления, с некоторой точностью. Результаты моделирования подтвердили эффективность разработанных алгоритмов.

В работе рассматривалась только кинематическая модель мобильного робота с постоянной линейной скоростью без учета динамики исполнительных устройств. В будущих исследованиях ограничения на постоянство скорости будет снято при рассмотрении полной математической модели колесной платформы с учетом динамики всех исполнительных приводов.

## Литература

1. Бурдаков С.Ф., Мирошник И.В., Стельмаков Р.Э. Системы управления движением колесных роботов. – СПб.: Наука, 2001. – 229 с.
2. Рапопорт Л.Б. Оценка области притяжения в задаче управления колесным роботом // Автоматика и телемеханика. 2006, № 9. – С. 69-89.
3. Кочетков С.А., Уткин В.А. Метод декомпозиции в задачах управления мобильными роботами // Автоматика и телемеханика. 2011, № 10. – С. 86-103.
4. Samson C. Control of Chained Systems. Application to Path Following and Timevarying Point-stabilization of Mobile Robots // IEEE Trans. on Automatic Control. Vol. 40. 1995, № 1. – P. 64-77.
5. Thuilot B., Cariou C., Martinet P., Berducat M. Automatic guidance of a farm tractor relying on a single CP-DGPS // Autonomous Robots. 2002, № 13. – P. 53-61.
6. Канатников А.Н., Касаткина Т.С. Особенности перехода к путевым координатам в задаче путевой стабилизации // Научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана «Наука и образование». 2012, № 7. – С. 211-222.
7. Пестерев А.В., Рапопорт Л. Б. Каноническое представление задачи путевой стабилизации для колесных роботов // Автоматика и телемеханика. 2013, № 5. – С. 80-101.
8. Пестерев А.В., Рапопорт Л.Б., Ткачев С.Б. Каноническое представление нестационарной задачи путевой стабилизации // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015, № 4. – С. 160-176.
9. Пестерев А.В. Синтез стабилизирующего управления в задаче следования колесного робота вдоль заданной кривой // Автоматика и телемеханика. 2012, № 7. – С. 25-39.
10. Busurin V. I., Yin Naing Win. Microoptoelectromechanical ring angular velocity transducer based on the optical tunnel effect for control system of mobile objects // Journal of Physics: Conference Series. Vol. 1333. 2019. – P. 1-7.
11. Краснова С.А., Антипов А.С. Иерархический синтез сигмоидальных обобщенных моментов манипулятора в условиях неопределенности // Проблемы управления. 2016, № 4. – С. 10-21.
12. Kochetkov S.A., Krasnova S.A., Antipov A.S. Cascade Synthesis of Electromechanical Tracking Systems with Respect to Restrictions on State Variables // IFAC PapersOnLine. Vol. 50. 2017, № 1. – P. 1042-10147.



13. *Kokunko Yu., Krasnova S.* Synthesis of a tracking system with restrictions on UAV state variables // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace (MESA). Vol. 10. 2019, № 4. – P. 695-705.
14. *Кокунько Ю.Г., Краснова С.А.* Два подхода к синтезу инвариантной системы слежения для беспилотного летательного аппарата // Управление большими системами. 2020, Вып. 85. – С. 113-142.
15. *Антипов А.С., Краснова С.А.* Блочный синтез системы слежения для двухроторной электромеханической системы при ограничениях на переменные состояния // Прикладная математика и механика. Том 85. 2021, № 1. – С. 3-20.
16. *Уткин В.А.* Инвариантность и автономность в системах с разделяемыми движениями // Автоматика и телемеханика. 2001, № 11. – С. 73-94.
17. *Краснова С.А., Мысик Н.С.* Синтез инвариантной системы управления продольным движением летательного аппарата // Автоматика и телемеханика. 2011, № 10. – С. 104-106.
18. *Краснова С.А., Уткин А.В.* Анализ и синтез минимально-фазовых нелинейных SISO-систем при действии внешних несогласованных возмущений // Проблемы управления. 2014, №6. – С. 22-30.
19. *Лукьянов А.Г.* Блочный метод синтеза нелинейных систем на скользящих режимах // Автоматика и телемеханика. 1998, № 7. – С. 14-34.