ПОСТРОЕНИЕ УПРАВЛЕНИЯ В ВИДЕ СИНТЕЗА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПАРАМЕТРОМ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ[34]

Даник Ю.Э., Дмитриев М.Г.

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,
Россия, г. Москва, просп. 60-летия октября д.9
yuliadanik@gmail.com, mdmitriev@mail.ru

Аннотация: Предлагается эффективный численный алгоритм определения обратной связи для систем на конечном интервале с параметром, который присутствует при управлении и принимает либо малые, либо большие значения или малым параметром, с помощью которого связываются подсистемы в задачах управления большой размерности. Алгоритм основан на построении асимптотического разложения дифференциальных уравнений Риккати с коэффициентами, зависящими от состояния в подходе SDRE. Строятся асимптотические разложения по малому параметру или его обратной величине. Полученные разложения используются как основа для построения и настройки одноточечных Паде аппроксимаций матриц коэффициентов усиления.

Ключевые слова: нелинейные системы, задачи управления на конечном интервале, обратная связь, малый параметр, Паде аппроксимация, слабоуправляемые системы, большой коэффициент усиления, слабосвязанные системы.

Введение

В научной литературе с конца 20-ого века появились работы по построению обратной связи в нелинейных непрерывных системах на полуоси по схеме алгоритма Калмана-Летова для линейных систем с квадратичным функционалом. Сначала, нелинейная система формально приводится к линейной и подбирается квадратичный критерий качества, где все коэффициенты матриц в системе и в критерии могут зависеть от переменных состояния (см. обзор [1]). При этом обратная связь формально имеет такой же вид, как в классическом подходе, но матрицы коэффициентов усиления теперь зависящие от состояния и являются решениями матричного алгебраического уравнения Риккати, где коэффициенты всех матриц могут также зависеть от координат вектора состояния. Такой подход получил название SDRE (State dependent Riccati equation). Как показывают многочисленные расчеты, управление в подходе SDRE оказывается субоптимальным и при этом часто доказывается, что замкнутая нелинейная система является асимптотически устойчивой на полуоси. Но на конечном интервале соответствующее матричное уравнение Риккати является уже дифференциальным [2] и усложняется из-за дополнительных членов, содержащих матричные тензоры.

В России этот подход развивается в работах [3-12]. Здесь предлагается развитие идей и техники построения обратной связи для трех классов нелинейных управляемых систем на конечном интервале с параметром, который присутствует при управлении и принимает либо малые, либо большие значения или с помощью которого связываются подсистемы в задачах управления большой размерности. В первом случае система является слабоуправляемой, а во втором - системой с большим коэффициентом усиления. В третьем классе рассматриваются системы большой размерности, которые можно представить в виде слабосвязанных систем с помощью введения параметра. На полуоси задачи первых двух классов рассматривались в [8,11], где, в частности, получен результат, что семейство двухточечных Паде регуляторов, построенных на основе асимптотических разложений решений матричных алгебраических уравнений Риккати по малому параметру и его обратной величине, стабилизирует стационарную систему при всех положительных значениях параметра. При этом отметим, что Паде регуляторы в [8,11] получены с помощью формальных алгоритмов построения оптимальных регуляторов на основе подбора весовых матриц критериев качества, как и в [5]. Для задач большой размерности, допускающих декомпозицию из-за слабой связанности подсистем, были также построены Паде регуляторы [10-12].

Таким образом, получающееся семейство регуляторов можно описать в виде аналитической зависимости от положительных значений параметра, что может быть использовано для выбора рациональных значений параметра с точки зрения дополнительных критериев оценки динамики, например, в задаче определения параметра на множестве допустимых движений, минимизирующего чувствительность той или иной координаты вектора состояния к изменению управления.

[34] *Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №21-11-00202*

В работе будем строить одноточечные Паде аппроксимации (ПА) на основе асимптотических разложений при малом коэффициенте усиления, т.е. для слабо управляемых систем, при большом коэффициенте усиления и слабосвязанных систем с параметром, связывающим подсистемы в системах большой размерности. Для систем с большим коэффициентом усиления асимптотическое разложение строится по обратным степеням малого параметра.

Показывается, что аналитическое описание семейства обратных связей обладает интерполяционными и экстраполяционными свойствами, т.е. позволяет с минимальным объемом вычислений определять допустимые обратные связи, как внутри интервала действия асимптотики, так и за его пределами. Построение синтезирующих конструкций на основе ПА в задачах управления позволяет расширить область применения построенных регуляторов на больший интервал значений параметра. Показывается, что аналитическое описание семейства обратных связей обладает интерполяционными и экстраполяционными свойствами и позволяет определять допустимые обратные связи как внутри интервала действия асимптотики, так и за его пределами.

1 Построение асимптотического разложения матричного дифференциального уравнения Риккати на конечном интервале.

Рассматривается задача

$$\dot{x} = A(x)x + \varepsilon B(x)u,\ x(0) = x^0,$$
$$x(t) \in X \subset R^n,\ u \in R^r,\ t \in [0,T],\ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0], \tag{1}$$

$$J(u) = \frac{1}{2}x^T(T)Fx(T) + \frac{1}{2}\int_0^T (x^T(t)Q(x,\varepsilon)x(t) + u^T(t)Ru(t))dt, \tag{2}$$

где $X \subset R^n$ некоторое ограниченное множество, а $\varepsilon_0 > 0 -$ некоторое малое положительное число.

I. Матрицы $A(x), B(x), Q(x,\varepsilon) -$ достаточно гладкие функции своих аргументов, а также $R, F -$ постоянные положительно определенные матрицы, а $Q(x,\varepsilon) -$ положительно полуопределенная матрица при всех $x \in X$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

Управление при этом выбираем в виде формально линейной обратной связи, но с коэффициентами, зависящими от состояния $u(x) = -\varepsilon R^{-1}B^T(x)P(x,t,\varepsilon)x(t)$, где $P(x,t,\varepsilon)$ есть решение модифицированного матричного дифференциального уравнения Риккати [2] при всех $x \in X$ и $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$

$$\dot{P}(x,t,\varepsilon) = -P(x,t,\varepsilon)A(x) - A(x)^T P(x,t,\varepsilon) + \varepsilon^2 P(x,t,\varepsilon)B(x)R^{-1}B^T(x)P(x,t,\varepsilon) -$$
$$-Q(x,\varepsilon),\ P(x,t,\varepsilon)\big|_{t=T} = F. \tag{3}$$

Здесь под $\dot{P}(x,t,\varepsilon) = \dfrac{dP(x,t,\varepsilon)}{dt}$ понимается полная производная по времени. Будем искать асимптотическое приближение $P(x,t,\varepsilon)$ второго порядка в виде регулярного ряда по целым степеням ε, $\tilde{P}_2(x,t,\varepsilon) = \tilde{P}_0(x,t) + \varepsilon\tilde{P}_1(x,t) + \varepsilon^2\tilde{P}_2(x,t)$.

Тогда $\tilde{P}_0(x,t)$ есть решение начальной задачи в обратном времени для матричного дифференциального уравнения типа Ляпунова

$$\dot{\tilde{P}}_0(x,t) = -A^T(x)\tilde{P}_0(x,t) - \tilde{P}_0(x,t)A(x) - Q_0(x),\ \tilde{P}_0(x,t)\big|_{t=T} = F.$$

Или после замены $\tau = T - t$, имеем

$$\dot{\tilde{P}}_0(x,\tau) = A^T(x)\tilde{P}_0(x,\tau) + \tilde{P}_0(x,\tau)A(x) + Q_0(x),$$
$$\tilde{P}_0(x,\tau)\big|_{\tau=0} = F \tag{4}$$

Введем условие

II. Пара матриц $(A(x), C_0(x))$ управляема, $C_0^T(x)C_0(x) = Q_0(x),\ \forall x \in X$.

Известно, что при условии *I* существует единственное положительно определенное решение уравнения Ляпунова [13-14].

При этом решение задачи для $\tilde{P}_0(x,\tau)$ (4) при фиксированном *x* имеет вид

$$\tilde{P}_0(x,t) = e^{A^T(x)(t-t_0)} F e^{A(x)(t-t_0)} + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A^T(x)(t-s)} Q_0(x) e^{A(x)(t-s)} ds$$

или

$$\tilde{P}_0(x,t) = e^{A^T(x)(t-t_0)} (F-D) e^{A(x)(t-t_0)} + D,$$

где $D-$ решение соответствующего линейного алгебраического матричного уравнения Ляпунова. $A^T(x)D + DA(x) = -Q_0(x)$. Такой подход к записи решения дифференциального уравнения Ляпунова был использован в частности в [2, 15].

В первом и втором приближении также можно получить начальные задачи для $\tilde{P}_1(x,\tau)$, $\tilde{P}_2(x,\tau)$, а именно, следующие начальные задачи для линейных матричных дифференциальных уравнений Ляпунова

$$\dot{\tilde{P}}_1(x,\tau) = A^T(x)\tilde{P}_1(x,\tau) + \tilde{P}_1(x,\tau)A(x) + Q_1(x),\ \tilde{P}_1(x,\tau)\Big|_{\tau=0} = 0,$$

$$\dot{\tilde{P}}_2(x,\tau) = A^T(x)\tilde{P}_2(x,\tau) + \tilde{P}_2(x,\tau)A(x) - \tilde{P}_0(x,\tau)B(x)R_0^{-1}B^T(x)\tilde{P}_0(x,\tau) + Q_2(x),\ \tilde{P}_2(x,\tau)\Big|_{\tau=0} = 0.$$

Введем дополнительные условия, определяющие положительную определенность $\tilde{P}_1(x,\tau)$, $\tilde{P}_2(x,\tau)$.

III. Пара матриц $(A(x), C_1(x))$ управляема, $C_1^T(x)C_1(x) = Q_1(x),\ x \in X$.

IV. Пара матриц $(A(x), C_2(x))$ управляема $C_2^T(x)C_2(x) = Q_2(x) + \tilde{P}_0(x,\tau)B(x)R_0^{-1}B^T(x)\tilde{P}_0(x,\tau),\ x \in X$.

Таким образом, матрица $Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x)$ подбираются так, чтобы выполнялись условия *II-IV*, обеспечивающие положительную определенность $\tilde{P}_2(x,t,\varepsilon)$, а для формирования обратной связи используется известный алгоритм [5].

Теперь, нетрудно установить, с помощью метода последовательных приближений, оценку отклонения асимптотического приближения от точного решения начальной задачи, по аналогии с сингулярно возмущенными начальными задачами, исследованными в [16].

Теорема 1. Пусть выполняются условия *I-IV*, тогда существуют постоянные $C > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, такие, что равномерно по $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $x \in X$ имеет место оценка

$$\left\| P(x,t,\varepsilon) - \tilde{P}_2(x,t,\varepsilon) \right\| \le C\varepsilon^3.$$

Это позволяет составить систему матричных линейных уравнений для ПА и в случае ее разрешимости получить основу для нахождения одноточечной Паде аппроксимации в окрестности малых значений параметра.

2 Асимптотика при больших значениях параметра.

При $\varepsilon \to \infty$ сделаем замену $\varepsilon = \dfrac{1}{\mu}, \mu \to 0$. Здесь вместо (3) имеем следующую начальную задачу для уравнения Риккати

$$\dot{P}(x,t,\mu) = -P(x,t,\mu)A(x) - A(x)^T P(x,t,\mu) + \frac{1}{\mu^2}P(x,t,\mu)B(x)R^{-1}B^T(x)P(x,t,\mu) - Q\left(x, \frac{1}{\mu}\right),$$

$$P(x,t,\mu)\big|_{t=T} = \mathrm{F},$$

где $Q\left(x, \dfrac{1}{\mu}\right) = Q_0(x) + \dfrac{1}{\mu}Q_1(x) + \dfrac{1}{\mu^2}Q_2(x)$.

Домножив на μ^2, получим

$$\mu^2\dot{P}(x,t,\mu)=-\mu^2P(x,t,\mu)A(x)-\mu^2A(x)^TP(x,t,\mu)+P(x,t,\mu)B(x)R^{-1}B^T(x)P(x,t,\mu)-$$
$$-\mu^2\left(Q_0(x)+\frac{1}{\mu}Q_1(x)+\frac{1}{\mu^2}Q_2(x)\right).$$

Как и выше построим аналогично асимптотическое приближение второго порядка в виде частичной суммы регулярного ряда по μ. Решение этого уравнения будет искать в виде разложения $\hat{P}_0(x,t)+\mu\hat{P}_1(x,t)+\mu^2\hat{P}_2(x,t)$. Тогда, получим следующие уравнения для членов этого асимптотического разложения

$$0=\hat{P}_0(x,t)B(x)R^{-1}B^T(x)\hat{P}_0(x,t)+Q_2(x)$$

$$0=\hat{P}_1(x,t)B(x)R^{-1}B^T(x)\hat{P}_0(x,t)+\hat{P}_0(x,t)B(x)R^{-1}B^T(x)\hat{P}_1(x,t)-Q_1(x)$$

$$\hat{P}_0(x,t)B(x)R^{-1}B^T(x)\hat{P}_2(x,t)+\hat{P}_2(x,t)B(x)R^{-1}B^T(x)\hat{P}_0(x,t)-$$
$$-\dot{\hat{P}}_0(x,t)-\hat{P}_0(x,t)A(x)-A(x)^T\hat{P}_0(x,t)+$$
$$+\hat{P}_1(x,t)B(x)R^{-1}B^T(x)\hat{P}_1(x,t)-Q_0(x)=0.$$

Для нулевого члена разложения получаем уравнение Риккати, для первого – алгебраическое уравнение Ляпунова, а для второго – уравнение Ляпунова, свободный член которого включает $\dot{\hat{P}}_0(x)$

Вводя дополнительные условия можно обеспечить разрешимость приведенных матричных уравнений и получить аналог теоремы 1.

3 Построение одноточечной Паде аппроксимации.

Здесь, используя асимптотику второго порядка для решения уравнения Риккати (3), будем строить одноточечную Паде аппроксимацию порядка [1/2], а именно

$$PA_{[1/2]}(x,t,\varepsilon)=\left(M_0(x,t)+\varepsilon M_1(x,t)\right)\left(E+\varepsilon N_1(x,t)+\varepsilon^2N_2(x,t)\right)^{-1}, \tag{5}$$

где E –nxn единичная матрица, матрицы $M_0(x,t),M_1(x,t),N_1(x,t),N_2(x,t)$ – квадратные непрерывно дифференцируемые матрицы размерности $n\times n$.

Неизвестные матричные коэффициенты находятся из системы, получающейся из приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε разложения в ряд матрицы $PA_{[1/2]}(x,t,\varepsilon)$ соответствующим коэффициентам представления $\tilde{P}_0(x,t)+\varepsilon\tilde{P}_1(x,t)+\varepsilon\tilde{P}_2(x,t)$. Ограничиваясь членами разложений до второго порядка, приходим к системе

$\varepsilon^0: M_0=\tilde{P}_0;$

$\varepsilon^1: M_1=\tilde{P}_0N_1+\tilde{P}_1;$

$\varepsilon^2: 0=\tilde{P}_0N_2+\tilde{P}_1N_1+\tilde{P}_2;$

$\varepsilon^3: 0=\tilde{P}_1N_2+\tilde{P}_2N_1$

или

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & -\tilde{P}_0(x,t) & 0 \\ 0 & 0 & -\tilde{P}_1(x,t) & -\tilde{P}_0(x,t) \\ 0 & 0 & \tilde{P}_2(x,t) & \tilde{P}_1(x,t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_0(x,t) \\ M_1(x,t) \\ N_1(x,t) \\ N_2(x,t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \tilde{P}_0(x,t) \\ \tilde{P}_1(x,t) \\ \tilde{P}_2(x,t) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Полученная система линейных уравнений (6) однозначно разрешима, если блочная матрица

$\Delta = \begin{pmatrix} -\tilde{P}_1(x,t) & -\tilde{P}_0(x,t) \\ \tilde{P}_2(x,t) & \tilde{P}_1(x,t) \end{pmatrix}$ невырожденная для любого $x \in X$, $t \in [0,T]$. Если Δ^{-1} существует, отсюда, очевидно, что, $\begin{pmatrix} \mathrm{N}_1(x,t) \\ \mathrm{N}_2(x,t) \end{pmatrix} = \Delta^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{P}_2(x,t) \\ 0 \end{pmatrix}$, а значит решение системы (6) однозначно определяется и имеет вид $M_0(x,t) = \tilde{P}_0(x,t),\ M_1(x,t) = \tilde{P}_0(x,t)N_1(x,t) + \tilde{P}_1(x,t)$, $\begin{pmatrix} \mathrm{N}_1(x,t) \\ \mathrm{N}_2(x,t) \end{pmatrix} = \Delta^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{P}_2(x,t) \\ 0 \end{pmatrix}$. Введем дополнительное условие *V*

V. Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и для любого $x \in X$ матрица $E + \varepsilon N_1(x,t) + \varepsilon^2 N_2(x,t)$ не имеет нулей.

Таким образом, имеет место

Теорема 2. Пусть выполняются условия *I-V*, тогда найдется достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, для любого $x \in X$, $t \in [0,T]$ существует одноточечная матричная Паде аппроксимация $PA_{[1/2]}(x,t,\varepsilon)$ вида (5) для решения дифференциального уравнения Риккати (3).

Введем на основе $PA_{[1/2]}(x,t,\varepsilon)$ симметричную матрицу $K_{[1/2]}(x,t,\varepsilon) = \dfrac{\left(PA_{[1/2]}(x,t,\varepsilon) + PA^T{}_{[1/2]}(x,t,\varepsilon)\right)}{2}$ и построим регулятор $u(x,t,\varepsilon) = -\varepsilon R^{-1} B^T(\varepsilon) K_{[1/2]}(x,t,\varepsilon) x$, где $x \in X$, $t \in [0,\mathrm{T}]$.

Для дополнительной оптимизации можно ввести в структуру системы для ПА неизвестные параметры (в общем случае диагональные матрицы) и находить их из минимума критерия оптимальности вдоль траектории замкнутой системы, например

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & -\lambda_1 \tilde{P}_0(x,t) & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 \tilde{P}_1(x,t) & -\lambda_3 \tilde{P}_0(x,t) \\ 0 & 0 & \lambda_4 \tilde{P}_2(x,t) & \lambda_5 \tilde{P}_1(x,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0(x,t) \\ M_1(x,t) \\ N_1(x,t) \\ N_2(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{P}_0(x,t) \\ \tilde{P}_1(x,t) \\ \tilde{P}_2(x,t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

и находить эти параметры $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ с учетом знакоопределенности $\tilde{P}_i(x,t),\ i = 0,1,2$.

4 Построение Паде аппроксимации $PA_{[1/2]}(x,t,\varepsilon)$ для слабосвязанной системы большой размерности на конечном интервале

По аналогии приведем схему алгоритма построения Паде регуляторов для слабосвязанной нелинейной управляемой системы большой размерности, которая включает две подсистемы

$$\dot{x} = A(x,\varepsilon)x + B(x,\varepsilon)u,\ x(0) = x_0$$

$$J(u) = \frac{1}{2} x^T(T) F x(T) + \frac{1}{2} \int_0^T (x^T(t) Q(x,\varepsilon) x(t) + u^T(t) R u(t)) \mathrm{dt} \to \inf_u,$$

$$A(x,\varepsilon) = \begin{bmatrix} A_1(x_1) & \varepsilon A_2(x_2) \\ \varepsilon A_3(x_1) & A_4(x_2) \end{bmatrix},\ B(x,\varepsilon) = \begin{bmatrix} B_1(x_1) & \varepsilon B_2(x_2) \\ \varepsilon B_3(x_1) & B_4(x_2) \end{bmatrix},$$

где

$$Q(x,\varepsilon) = \begin{bmatrix} Q_1(x_1) & \varepsilon Q_2(x_1,x_2) \\ \varepsilon Q_2{}^T(x_1,x_2) & Q_3(x_2) \end{bmatrix} \geq 0,\ R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} > 0,$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in X,\ x_1 \in R^n,\ x_2 \in R^m,\ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in R^r,\ u_1 \in R^{r_1}, u_2 \in R^{r_2},\ r_1 + r_2 = r,\ \ t \in [0,\infty),\ 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \ll 1.$$

Для данного класса задач уравнение Риккати имеет вид

$\dot{P}(x,t,\varepsilon) = -P(x,t,\varepsilon)A(x,\varepsilon) - A^T(x,\varepsilon)P(x,t,\varepsilon) + P(x,t,\varepsilon)B(x,\varepsilon)R^{-1}(x,t,\varepsilon)B^T(x,\varepsilon)P(x,t,\varepsilon) - Q(x,\varepsilon),$ а управление $u = -R^{-1}B^T(x,\varepsilon)P(x,t,\varepsilon)x$.

Отличие от задачи (1)-(3) состоит в отсутствии параметра ε при нелинейности $P(x,t,\varepsilon)B(x,\varepsilon)R^{-1}(x,t,\varepsilon)B^T(x,\varepsilon)P(x,t,\varepsilon)$ в уравнении Риккати и специальном виде матриц $A(x,\varepsilon), B(x,\varepsilon), Q(x,\varepsilon), R$.

Блоки в матрицах системы и критерия, отвечающие за связь подсистем, содержат малый множитель ε, а матрица $P(x,t,\varepsilon)$ при этом представляется в виде

$$P(x,t,\varepsilon) = \begin{bmatrix} P_1(x_1,x_2,t,\varepsilon) & \varepsilon P_2(x_1,x_2,t,\varepsilon) \\ \varepsilon P_2^T(x_1,x_2,t,\varepsilon) & P_3(x_1,x_2,t,\varepsilon) \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

где асимптотическое приближение для блоков ищется в том же виде $P_i(x_1,x_2,t,\varepsilon) = P_{i0} + \varepsilon P_{i1}(x,t) + \varepsilon^2 P_{i2}(x,t),\ i = 1,2,3$.

Из представления (7) следует, что для блоков P_{10}, P_{30} решения уравнения Риккати в нулевом приближении получаются дифференциальные уравнения Ляпунова, а для второго блока P_{20} - дифференциальное уравнение Сильвестра. Аналогичные уравнения получаются и для членов первого и второго приближений, а именно дифференциальные уравнения Ляпунова для P_{11}, P_{31}, P_{12}, P_{32} и дифференциальные уравнения Сильвестра [14, 15] для P_{21}, P_{22}.

Также, как и в задаче стабилизации на бесконечном интервале [10], здесь можно улучшить качество построенного асимптотического разложения с использованием одноточечной Паде аппроксимации (5) на основе асимптотического разложения второго порядка, как в пункте 3.

5 Рекомендации к проведению численных расчетов ПА матриц коэффициентов усиления.

Приведенные алгоритмы для построения Паде аппроксимаций (ПА) для законов синтеза в нелинейных задачах управления на конечном интервале по структуре те же, что и Паде регуляторы, построенные при решении задач стабилизации [8,10,11,12] и позволяют сделать вывод, что спецификой здесь является необходимость решения матричных дифференциальных уравнений вместо алгебраических для поиска членов асимптотических приближений.

Приведем, на основе опыта расчетов ПА регуляторов [8,10,11,12] для задач стабилизации, рекомендации по построению законов обратной связи для классов систем на конечном интервале, обсуждаемых в работе, а именно, систем с малым или большим параметром при управлении и слабосвязанных систем. Нами были проведены три группы экспериментов, в первой группе вычислялась асимптотика решений уравнений Риккати с коэффициентами, зависящими от состояния и сравнивались полученные регуляторы, вычисленные на основе асимптотики с регуляторами в подходе SDRE. Вторая группа содержала расчеты, посвященные построению уже Паде конструкций для решений матричных алгебраических уравнений Риккати, которые лежали в основе субоптимальных регуляторов. И, наконец, третья группа экспериментов была связана с рассмотрением ПА решений уравнений Риккати в качестве каркаса для уточнения элементов матрицы коэффициентов усиления Паде регулятора.

Рекомендации включают:

- Построение симметричных матриц коэффициентов усиления на основе Паде аппроксимаций.
- Подбор начальных значений корректирующих параметров для итерационных алгоритмов нелинейного программирования, используя асимптотические приближения.
- На основе структуры системы линейных уравнений выполнять коррекцию коэффициентов этой системы с целью оптимизации критерия качества вдоль траекторий замкнутой системы, получающейся вдоль построенного регулятора, учитывая возможность появления нулей в знаменателе ПА, и стремление к построению положительно определенных коэффициентов асимптотических разложений.
- Для преодоления нулей в знаменателях ПА использовать сплайн конструкции.
- С целью улучшения интерполяционных и экстраполяционных свойств параметрических семейств регуляторов желательно строить двухточечные Паде аппроксимации там, где это возможно.

Заключение

В работе проведен перенос техники построения стабилизирующих регуляторов для нелинейных систем с параметром на случай управления на конечном интервале времени для трех классов нелинейных управляемых систем и предложен численный алгоритм определения параметрических семейств законов обратной связи для систем с малым или большим параметром при управлении и слабосвязанных систем. Построены асимптотические разложения второго порядка для дифференциальных уравнений Риккати с коэффициентами, зависящими от состояния. Для коэффициентов разложения получены линейные дифференциальные уравнения Ляпунова и Сильвестра. Полученные разложения используются как основа для построения и настройки одноточечных Паде аппроксимаций матриц коэффициентов усиления порядка [1/2].

Литература

1. *Çimen T.* Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the state-dependent Riccati equation (SDRE) method // Annual Reviews in control. Vol. 34. 2010, №. 1. – P. 32-51.
2. *Heydari A., Balakrishnan S. N.* Approximate closed-form solutions to finite-horizon optimal control of nonlinear systems // 2012 American Control Conference (ACC). 2012. – P. 2657-2662.
3. *Афанасьев В. Н.* Управление нелинейными объектами с параметрами, зависящими от состояния // Автоматика и телемеханика. 2011, №. 4. – С. 43-56.
4. *Афанасьев В. Н., Преснова А. П.* Параметрическая оптимизация нелинейных систем, представляемых моделями с использованием метода “расширенной линеаризации” // Автоматика и телемеханика. 2021, №. 2. – С. 71-93.
5. *Дмитриев М. Г., Макаров Д. А.* Гладкий нелинейный регулятор в нелинейной системе управления с коэффициентами, зависящими от состояния // Труды ИСА РАН. Т. 64. 2014, № 4. – С. 53-58.
6. *Емельянов С. В., Даник Ю. Э., Дмитриев М. Г., Макаров Д. А.* Стабилизация нелинейных дискретных динамических систем с параметром и с коэффициентами, зависящими от состояния // Доклады академии наук. Т. 466. 2016, №3. – С. 282-284.
7. *Danik Yu. E., Dmitriev M. G.* A comparison of numerical algorithms for discrete-time state dependent coefficients control systems // 21st International Conference on System Theory, Control and Computing, Sinaia, Romania, October 19-21, 2017. 2017. – P. 401-406.
8. *Danik Yu. E., Dmitriev M. G.* Construction of Parametric Regulators for Nonlinear Control Systems Based on the Pade Approximations of the Matrix Riccati Equation Solution // IFAC-PapersOnLine. Vol. 51. 2018, Issue 32. – P. 815-820.
9. *Kabanov A. A.* Feedback linearization of nonlinear singularly perturbed systems with state-dependent coefficients // International Journal of Control, Automation and Systems. Vol. 18. 2020, № 7. – 1743-1750.
10. *Даник Ю.Э.* Построение параметрического семейства регуляторов для одного класса слабосвязанных нелинейных систем // Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения XXX» (3-9 мая 2019). – Воронеж: Издательский дом ВГУ. 2019. – С. 114-117.
11. *Danik Yu., Dmitriev M.* The construction of stabilizing regulators sets for nonlinear control systems with the help of Padé approximations // Nonlinear Dynamics of Discrete and Continuous Systems. – Springer International. 2021. – P. 45-62.
12. *Danik Yu. E., Dmitriev M. G.* Stabilizing regulator for nonlinear discrete weakly coupled systems based on the Pade approximation // Proceedings of 2019 12th International Conference "Management of Large-Scale System Development", MLSD 2019.
13. *Демиденко Г. В.* Матричные уравнения. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та. 2009.
14. *Параев Ю.И.* Уравнения Ляпунова и Риккати. – Томск: Издательство Томского университета, 1989.
15. *Barraud A.* A new numerical solution of Ẋ= A_ {1} X+ XA_ {2}+ D, X (0)= C // IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 22. 1977, №. 6. – P. 976-977.
16. *Васильева А.Б Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с.