

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НАКРЫТИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ ЧЕТЫРЕХКОЛЕСНОЙ ТЕЛЕЖКИ³²

Белинская Ю.С.

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»

Российской Академии Наук,

Россия, г. Москва, просп. 60-летия Октября, д.11,

ФГБОУ высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана» (национальный исследовательский университет),

Россия, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, д.5, к.1

usbelka@mail.ru

В статье рассматривается алгоритм построения простых маневров движения для системы, описывающей движение четырехколесной тележки методом накрытий. Доказана плоскостность системы, приведена конструкция соответствующего накрытия. Вычислительные эксперименты демонстрируют эффективность предлагаемого подхода.

Ключевые слова: плоские системы, метод накрытий, задача терминального управления

Введение

С развитием крупномасштабных систем большее распространение получают задачи управления мобильными роботами в среде со статическими и динамическими препятствиями. Например, ставится задача перемещения робота из одной точки карты в другую за минимально возможное время, при этом движение робота за все время движения происходит без столкновения с препятствиями. В качестве перспективных методов решения таких задач используются методы интеллектуального планирования [1-2]. В части таких подходов задача навигации разбивается на задачу построения траектории, исключающей столкновения со всеми препятствиями, и следовании вдоль построенной траектории [3]. При этом траектория выбирается из некоторого класса кривых, известных предварительно. Например, можно считать траекторию кусочно-линейной [4], если движение между точками на карте происходит по прямой, а модель мобильного робота допускает поворот на месте. В более общем случае траектория выбирается как последовательность предварительно заданных графических примитивов [5-6]. В этом случае решение задачи управления состоит из трех этапов: выбор и параметризация графических примитивов, построение траектории как последовательности примитивов и следование вдоль построенной траектории. При этом задача построения примитива может рассматриваться как краевая задача, а значит, для ее решения могут быть применены методы решения задач терминального управления.

На движение мобильного робота могут накладываться ограничения, которые возникают из физической постановки задачи или из других соображений. Часть этих ограничений связана с наличием статических и динамических препятствий на карте. Но помимо этих ограничений, возможны и другие ограничения, например, значения линейной скорости и ускорения, а также угловой скорости и ускорения не могут превышать некоторых заданных величин. Наличие ограничений существенно усложняет решение задачи управления.

Решение задачи навигации в среде со статическими и динамическими препятствиями с помощью построения графических примитивов позволяет учитывать наложенные на движение системы ограничения поэтапно: параметризацию примитивов можно выбрать так, чтобы учесть ограничения на линейную и угловую скорость и ускорение системы, а ограничения на фазовое пространство, связанное с избеганием столкновений с препятствиями, учитываются на этапе построения желаемой траектории как последовательности выбранных примитивов. Похожий прием был применен в работе [7], когда решение задачи управления в среде со сложной геометрией решалось в два этапа: на первом этапе строилась траектория, учитывающая геометрические ограничения на координаты мобильного робота, а на втором этапе решалась задача следования по построенной траектории, при этом учитывались ограничения на скорости и ускорения системы. Важной особенностью системы при этом являлась ее плоскостность [8]. В данной работе модель системы также предполагается плоской. На первый взгляд это может показаться серьезным ограничением, но на самом деле многие

³² Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00202, <https://rscf.ru/project/21-11-00202/>.

динамические системы, описывающие движения различных транспортных средств, действительно являются плоскими.

При решении задачи навигации в среде со сложной геометрией с помощью графических примитивов возможна ситуация, когда набор заранее выбранных примитивов оказывается недостаточным для решения задачи, или траектория, построенная как последовательность таких примитивов, оказывается чересчур длинной. В этом случае набор примитивов можно расширить с учетом требований задачи. Однако даже в случае расширения этого набора построенных примитивов может оказаться недостаточно, и возникает задача построения примитива on-line, уже в процессе движения мобильного робота в среде со сложной геометрией. Таким образом, оказывается актуальной задача быстрого построения примитивов, когда по заданным начальным и конечным условиям с помощью заранее разработанной процедуры удастся установить, возможно ли за разумное время движение из заданного начального положения в заданное конечное положение при соблюдении всех ограничений на скорости и ускорения движения. В случае положительного ответа на последний вопрос эта процедура также должна построить такой примитив. Это позволяет решать задачи навигации более гибко, делая возможным движение мобильного робота в среде с большим количеством других агентов.

В настоящей статье рассмотрена задача построения примитивов для системы, описывающей движение четырехколесной тележки. Построение примитива осуществляется с помощью метода, основанного на концепции накрытия [9-10], который позволяет сводить решение краевой задачи к решению двух связанных задач Коши, что существенно упрощает решение задачи, а значит, подобный подход может быть в дальнейшем использован для построения графических примитивов on-line. В работе [11] было показано, что для плоской системы использование метода накрытий упрощается.

1 Метод накрытий

1.1 Понятие плоской системы

Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in X \subseteq R^n, \quad u \in U \subseteq U^m. \quad (1)$$

где t — независимая переменная (время), $x = (x_1, \dots, x_n)$ — переменные состояния, $u = (u_1, \dots, u_m)$ — вход системы (управление), $\dot{x} \equiv dx/dt$, X и U — области их изменения, $f = (f_1, \dots, f_n)$ — гладкая, то есть бесконечно дифференцируемая, векторная функция.

Система (1) называется дифференциально плоской, если определены функции

$$y_1 = Y_1(t, x, \dots, x^{(l)}), \dots, y_m = Y_m(t, x, \dots, x^{(l)}). \quad (2)$$

количество которых равно размерности m управления, таких, что все переменные состояния и управления выражаются через эти функции или их производные до некоторого конечного порядка:

$$\begin{aligned} x &= X(t, y_1, \dots, y_1^{(k_1)}, y_2, \dots, y_m^{(k_m)}), \\ u &= U(t, y_1, \dots, y_1^{(k_1+1)}, y_2, \dots, y_m^{(k_m+1)}). \end{aligned} \quad (3)$$

а любой набор функций (2), их производных в силу системы (1) и функции t функционально независим. При этом набор (2) функций называют плоским выходом системы.

Можно показать, что с помощью выбора динамического расширения системы (1) плоские системы эквивалентны системам вида

$$y_i^{(n_i)} = v_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4)$$

где $n_1 + \dots + n_m = n$.

1.2 Описание метода накрытий

Пусть для системы (1) поставлена задача терминального управления

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f. \quad (5)$$

где t_0 — начальный момент времени, t_f — конечный момент времени. Задача терминального управления заключается в поиске управления u , которое переводит систему из заданного начального x_0 в заданное конечное положение x_f .

Для решения задачи (4-5) применим метод, называемый методом накрытий [10]. Предположим, что мы нашли функции $U_i, \varphi_j, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$, переменных

$$t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dot{u}_1, \dots, u_1^{(k_1-1)}, u_2, \dots, u_m^{(k_m-1)}, \quad (6)$$

удовлетворяющие следующим условиям:

(А) Соотношения вида $p_j = \varphi_j, j=1, \dots, n$ определяют накрытие из системы

$$\dot{x}_j = f_j(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), j=1, \dots, n, \quad (7)$$

$$u_i^{(k_i)} = U_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dot{u}_1, \dots, u_1^{(k_1-1)}, u_2, \dots, u_m^{(k_m-1)}), i=1, \dots, m, \quad (8)$$

в систему вида

$$\dot{p} = P(t, p), p \in R^n. \quad (9)$$

(В) Заданные конечные условия на функцию x однозначно определяют конечные условия на функцию p и наоборот, конечные условия на функцию p определяют конечные условия на функцию x .

(С) Из начальных условий на функцию p можно однозначно определить начальные условия для переменных

$$u_1, \dot{u}_1, \dots, u_1^{(k_1-1)}, u_2, \dots, u_m^{(k_m-1)}. \quad (10)$$

В случае выполнения условий (А), (В), (С) задача терминального управления может быть решена следующим образом:

1) Из конечных условий (5) вычисляем конечные условия на функцию p ,

2) Решаем задачу Коши для системы (9) с начальными условиями в точке t_f в сторону уменьшения времени,

3) Из начальных условий на функцию p находим начальные условия для переменных (10), а именно

$$u_1(t_0), \dot{u}_1(t_0), \dots, u_1^{(k_1-1)}(t_0), u_2(t_0), \dots, u_m^{(k_m-1)}(t_0). \quad (11)$$

4) Решаем задачу Коши для системы (7), (8) с начальными условиями (5), (11).

Найденное таким образом решение есть решение задачи (1), (5), так как построенная функция $x(t)$ удовлетворяет начальным условиям (5) по построению, а конечным условиям (5) из условия (В).

Систему вида (7)-(8), удовлетворяющую условиям (А), (В), (С) для некоторых функций φ_j , будем называть Γ -замыканием задачи терминального управления (1), (5). Как показано выше, Γ -замыкание позволяет решать задачу терминального управления.

В работе [11] было показано, что в качестве Γ -замыкания произвольной задачи терминального управления для плоской системы можно взять любое дифференциальное уравнение, порядок которого равен количеству граничных условий задачи, то есть $2n$. Этим объясняется удобство использования метода накрытий для решения задачи терминального управления для плоской системы.

В данной работе описанный метод используется для вычисления примитивов, то есть для построения траектории в пространстве плоских выходов. После этого с помощью формул (3) построенная траектория пересчитывается в исходных фазовых переменных. Эти же формулы позволяют найти и программное управление, решающее поставленную задачу.

2 Решение задачи построения примитивов для динамической системы четырехколесной тележки

2.1 Плоскостность кинематической модели динамической системы, описывающей движение четырехколесной тележки

Рассмотрим динамическую систему [12], описывающее движение четырехколесной тележки

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= v \cos \theta, \\
\dot{y} &= v \sin \theta, \\
\dot{\theta} &= v \cdot \kappa, \\
\dot{v} &= u_v, \\
\dot{\kappa} &= u_\kappa,
\end{aligned} \tag{12}$$

где (x, y) — координаты центра масс тележки, θ — ориентация тележки, v — ее линейная скорость, κ — кривизна траектории, u_v, u_κ — управления. Переменные x, y, θ, v, κ задают состояние системы.

Эта система является плоской с плоским выходом

$$y_1 = x, y_2 = y. \tag{13}$$

В самом деле, все переменные состояния и управления могут быть выражены с помощью функций (13) и их производные до конечного порядка следующим образом:

$$x = y_1, y = y_2, \theta = \arctg\left(\frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1}\right), v = \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}, \kappa = \frac{\dot{y}_1 \ddot{y}_2 - \dot{y}_2 \ddot{y}_1}{(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)^{3/2}}, \tag{14}$$

$$u_v = \frac{\dot{y}_1 \ddot{y}_1 + \dot{y}_2 \ddot{y}_2}{\sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}}, u_\kappa = \frac{\dot{y}_1 \ddot{y}_2 - \dot{y}_2 \ddot{y}_1 (\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) - 3(\dot{y}_1 \dot{y}_2 - \dot{y}_2 \dot{y}_1)(\dot{y}_1 \ddot{y}_1 + \dot{y}_2 \ddot{y}_2)}{(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)^{5/2}}. \tag{15}$$

Из формул (14) видно, что для обратимости замены переменных $(x, y, \theta, v, \kappa) \leftrightarrow (y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2)$ необходимо добавить к исходному фазовому пространству еще одну переменную. Пусть

$$\xi = \dot{y}_1 \ddot{y}_1 + \dot{y}_2 \ddot{y}_2. \tag{16}$$

Тогда функции (14) и их производные по времени до второго порядка выражаются в терминах расширенного фазового пространства следующим образом:

$$y_1 = x, y_2 = y, \dot{y}_1 = v \cos \theta, \dot{y}_2 = v \sin \theta, \ddot{y}_1 = \frac{\xi \cos \theta - \kappa v^3 \sin \theta}{v}, \ddot{y}_2 = \frac{\xi \sin \theta + \kappa v^3 \cos \theta}{v}. \tag{17}$$

Дифференцируя (16) по времени в силу системы (12) и подставляя вместо производных функций (13) выражения (17), получим

$$\dot{\xi} = \frac{d}{dt}(\dot{y}_1 \ddot{y}_1 + \dot{y}_2 \ddot{y}_2) = \left(\frac{\xi}{v}\right)^2 + \kappa^2 v^4 + v(\ddot{y}_1 \cos \theta + \ddot{y}_2 \sin \theta). \tag{18}$$

Уравнение (18) задает динамическую обратную связь для системы (12). Обозначив

$$\ddot{y}_1 = v_1, \ddot{y}_2 = v_2 \tag{19}$$

получим, что система (19) эквивалентна расширенной системе вида

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= v \cos \theta, \\
\dot{y} &= v \sin \theta, \\
\dot{\theta} &= v \cdot \kappa, \\
\dot{v} &= \frac{\xi}{v}, \\
\dot{\kappa} &= \frac{1}{v^2}(v_2 \cos \theta - v_1 \sin \theta - 3\kappa \xi), \\
\dot{\xi} &= \left(\frac{\xi}{v}\right)^2 + \kappa^2 v^4 + v(v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta).
\end{aligned} \tag{20}$$

Следовательно, система (12) является плоской при $v \neq 0$. Выражения v_1, v_2 — новые управления системы.

2.2 Метод накрытий для построения графического примитива движения четырехколесной тележки

Построим накрытие для системы (19). Пусть

$$p_i = y_i + \frac{1}{6}(t_f - t)^3 \ddot{y}_i + \frac{1}{8}(t_f - t)^4 y_i^{(4)} + \frac{1}{20}(t_f - t)^5 y_i^{(5)}, i = 1, 2. \tag{21}$$

Тогда для любого многочлена пятого порядка, то есть если $y_i^{(6)} = 0, i = 1, 2,$

$$\dot{p}_i = \dot{y}_i - \frac{1}{2}(t_f - t)^2 \ddot{y}_i - \frac{1}{3}(t_f - t)^3 y_i^{(4)} - \frac{1}{8}(t_f - t)^4 y_i^{(5)}, i = 1, 2 \quad (22)$$

$$\dot{p}_i = \ddot{y}_i + (t_f - t) \ddot{y}_i + \frac{1}{2}(t_f - t)^2 y_i^{(4)} + \frac{1}{6}(t_f - t)^4 y_i^{(5)}, i = 1, 2 \quad (23)$$

$$\ddot{p}_i = 0, i = 1, 2 \cdot$$

Пусть заданы начальный t_0 и конечный t_f моменты времени, а также граничные условия на фазовые переменные системы (20):

$$\begin{aligned} x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, \theta(t_0) = \theta_0, v(t_0) = v_0, \kappa(t_0) = \kappa_0, \xi(t_0) = \xi_0, \\ x(t_f) = x_f, y(t_f) = y_f, \theta(t_f) = \theta_f, v(t_f) = v_f, \kappa(t_f) = \kappa_f, \xi(t_f) = \xi_f. \end{aligned} \quad (24)$$

Используя формулы (17), можно вычислить граничные условия в терминах плоского выхода. Значит, задача построения графического примитива для системы (19) в пространстве многочленов пятого порядка может быть решена следующим образом.

1) Из конечных условий на функции $y_i, i = 1, 2$, вычисляем конечные условия $p_{if}, \dot{p}_{if}, \ddot{p}_{if}, i = 1, 2$, на функции P_i , подставляя $t = t_f$ в уравнения (21)-(22).

2) Решение задачи Коши для системы (23) с начальными условиями в точке t_f в сторону уменьшения времени имеет вид

$$p_i = \frac{1}{2}(t - t_f)^2 \ddot{p}_{if} + (t - t_f) \dot{p}_{if} + p_{if}, i = 1, 2 \cdot \quad (25)$$

3) Подставляя $t = t_0$ в функцию (25), находим начальные условия $p_{i0}, \dot{p}_{i0}, \ddot{p}_{i0}, i = 1, 2$, на функции P_i .

4) Из начальных условий на функции P_i из формул (21)-(22) находим начальные условия для переменных $y_i, i = 1, 2$, а именно

$$\ddot{y}_i(t_0), y_i^{(4)}(t_0), y_i^{(5)}(t_0), i = 1, 2 \cdot \quad (26)$$

5) Находим два многочлена пятого порядка, удовлетворяющих условиям на функции $y_i, i = 1, 2$, в точке t_0 . Эти многочлены в силу формул (14) дают программную траекторию по всем фазовым переменным расширенной системы (20).

3 Численные эксперименты

Описанный алгоритм был применен для построения графических примитивов для системы (20) при различных начальных и конечных условиях. Всюду при вычислении примитивов предполагалось, что

$$\begin{aligned} t_0 = 0, x(0) = 0, y(0) = 0, v(0) = 1, \kappa(0) = 0, \xi(0) = 0, \\ v(t_f) = 1, \kappa(t_f) = 0, \xi(t_f) = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Остальные граничные условия отражены в таблице 1.

Таблица 1. Граничные условия для построения графических примитивов движения четырехколесной тележки.

No	$\theta(0)$	t_f	$x(t_f)$	$y(t_f)$	$\theta(t_f)$
1	0	4.1	4	1	$\pi/4$
2	0	2	1	0	0
3	0	4.1	4	-1	$-\pi/4$
4	$\pi/4$	5	2	4	$\pi/2$
5	$\pi/4$	2.8	2	2	$\pi/4$
6	$\pi/4$	5	4	2	0

Кроме того, можно построить аналогичные примитивы для различных начальных углов ориентации тележки с шагом $\pi/4$. Таким образом, можно получить 24 различных примитива. Полученные примитивы в координатах $y(x)$ изображены на рис. 1.

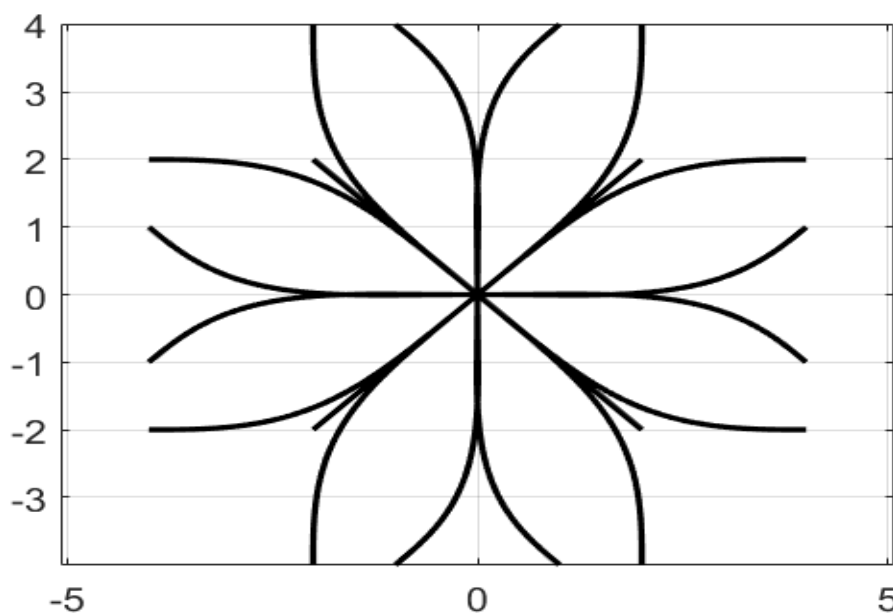


Рис. 1. Примеры графических примитивов движения для четырехколесной тележки.

Из рисунка видно, что при значениях времени, близким к начальному и конечному моменту, траектория близка к прямой. Это объясняется тем, что кривизна κ траектории в начальный и конечный момент времени считалась равной 0.

Приведенные численные эксперименты показывают, что метод оказывается эффективным для построения графических примитивов при различных начальных и конечных условиях. Этот алгоритм может быть использован для построения графических примитивов в реальном времени, поскольку время вычисления коэффициентов полинома невелико. Единственную сложность при этом представляет собой выбор времени исполнения примитива. В случае, если на линейную скорость или ускорение системы накладываются ограничения, длительность примитива должна быть скорректирована с учетом этого ограничения. Создание алгоритма автоматического выбора длительности исполнения маневра станет следующим этапом работы в данном направлении.

Заключение

В статье представлен новый алгоритм для расчета относительно простых маневров движения (примитивов) четырехколесной тележки с помощью метода накрытий. Рассмотренная кинематическая модель тележки описывается плоской динамической системой, а значит, время расчета траектории для такой системы упрощается и в рассмотренном случае сводится к нахождению коэффициентов двух полиномов пятого порядка. В качестве примера приведены траектории для 24 маневров при различных начальных и конечных условиях. В дальнейшем планируется разработать алгоритм автоматического расчета времени исполнения примитива, позволяющий применить описанный алгоритм в реальном времени.

Литература

1. Phillips M., Likhachev M. SIPP: Safe interval path planning for dynamic environments // Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA 2011), 2011. – P. 5628-5635.
2. Van der Berg J., Guy S., Lin M., Manocha D. Reciprocal n-body collision avoidance // Robotics Research, 2011. P. 3-19.
3. Likhachev M., Ferguson D. Planning long dynamically feasible maneuvers for autonomous vehicles // The international Journal of Robotics Research, Vol. 28 (8), 2009. P. 933-945.
4. Yakovlev K., Andreychuk A., Belinskaya J., Makarov D. Combining Safe Interval Path Planning and Constrained Path Following Control: Preliminary Results // Proceeding of the 4th International Conference on interactive collaborative robotics (ICR 2019), Istanbul, Turkey, August 20-25, 2019. Pp. 310-319. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-26118-4_30.
5. Pivtoraiko M., Kelly A. Generating near minimal spanning control sets for constrained motion planning in discrete state spaces // Proceedings of the 2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2005), 2005. P. 3231-3237.
6. Sakcsak B., Bascetta L., Ferretti G., Prandini M. Sampling-based optimal kynodynamic planning with motion primitives // Autonomous Robots, Vol. 43 (7), 2019. P. 1715-1732.

7. *Flores M.E., Milam M.B.* Trajectory Generation for differentially flat systems via NURBS basis functions with obstacle avoidance // Proceedings of the 2006 American control conference, 2006. P. 5769-5775.
8. *Fliess M., Levine J. L., Martin Ph., Rouchon P.* Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples // International Journal of Control, Vol. 61(6). 1995. P. 1327-1361.
9. Симметрии и законы сохранения математической физики, *под. ред. А.М. Виноградова и И.С. Красильщика* // 2 изд., испр. и доп. М.: Факториал. 2005, 474 с.
10. *Белинская Ю.С., Четвериков В.Н.* Метод накрытий для терминального управления с учетом ограничений // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, No. 12. С.1629-1635.
11. *Belinskaya Yu. S., Chetverikov V. N.* Covering Method for Point-to-Point Control of Constrained Flat System // IFAC-Papers OnLine. 2015. Vol. 48, No. 11, P.924-929.
12. *Webb D. J., van der Berg J.* Kinodynamic RRT*:Asymptotically Optimal Motion Planning for Robots with Linear Dynamics // Proceedings of the 2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 2013. P. 5039-5046.