

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ В ПРИЗАБОЙНОЙ ЗОНЕ НЕФТЕДОБЫВАЮЩИХ СКВАЖИН

Ахметзянов А.В., Самохин А.В.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65

atlas@ipu.ru, samohinalexey@gmail.com

Аннотация: В докладе описаны проблемы управления процессами фильтрации и оптимизации отбора нефти при волновых воздействиях в призабойных зонах скважин нефтяных месторождений. Выбор параметров режима управления обусловлен геологическими характеристиками нефтенасыщенных пористых сред, реологическими свойствами залежей, размерами призабойных зон и геометрией размещения скважин. Приведён сравнительный анализ двух вариантов создания математических моделей волновых процессов в таких условиях: Кортвега-де Фриза-Бюргерса и Хохлова-Заболоцкой.

Ключевые слова: управление нефтедобычей, волновые процессы, пилообразные волны.

Введение

В среде без дисперсии любое периодическое возмущение на больших расстояниях превращается в "пилу с треугольными зубцами".

Пилообразные волны похожи на ударные волнам, но распространяются в средах с вязкостью. Стандартные ударные волны представляет собой пример сильного разрыва гидродинамических параметров: функции, их описывающие, претерпевают конечные разрывы. К сильным разрывам относятся также тангенциальные (контактные) разрывы. Существует, однако, понятие слабого разрыва, когда сами параметры непрерывны, а претерпевают разрывы те или иные их пространственные производные, причем только нормальные производные (пилообразные волны как раз и являются слабо разрывными). Пилообразные волны — это бегущие волны, профиль которых содержит как слабые разрывы, так и гладкие участки. При дальнейшем распространении пиковые значения возмущений убывают. Профили пилообразных волн устойчивы и мало изменяются как при парном взаимодействии, так и при слабом воздействии дополнительных факторов – дифракции, дисперсии, низкочастотной модуляции и т.п. Поверхности слабого разрыва распространяются относительно среды со скоростью, равной скорости звука см. обзор [1].

Исследования и приложения теории нелинейных пилообразных волн связаны сейчас с распространением волн в неоднородных средах, см. обзор [2]. Эти проблемы можно условно разделить на две группы: задачи, связанные с проблемой формирования интенсивных воздействий (ударов), а также обратные задачи нелинейного неразрушающего контроля и диагностики (восстановление параметров источника, рассеивателей, трассы распространения сигнала).

Наиболее проста модель Кортвега-де Фриза-Бюргерса, описывающая пространственно-одномерные плоские, цилиндрические или сферические волны. В этом случае аналитические методы и численное моделирование позволяют наглядно представить принципиальные особенности волновых процессов в вязкой среде. Однако для адекватного описания волн в плоских слоях, характерных для нефтегазовых месторождений, следует использовать двумерные уравнения.

Двумерное уравнение Бюргерса представляет собой особую форму несжимаемого уравнения Навье-Стокса, не имеющего члена давления и уравнения неразрывности. Оно является системой уравнений гидродинамики в частных производных и часто используется для различных физических приложений.

В реальных условиях часто приходится иметь дело с пучками волн, на эволюции которых сказывается дифракция; в частности, при моделировании колебаний, создаваемых генератором, погруженным в скважину. Такие явления описываются уравнением Хохлова-Заболоцкой.

Ниже приведены математические модели описания волновых процессов в призабойной зоны нефтеносной скважины.

1 Математические модели волновых процессов в призабойной зоне нефтеносной скважины

1.1 Модель Кортвега-де Фриза-Бюргерса

Для описания пилообразных волн необходимо правильно определить положение и форму ударного фронта, а также величины возмущений при переходе через фронт ударной волны. Рассмотрим уравнения Бюргерса

$$u_t = -2uu_x + \varepsilon^2 u_{xx}$$

и Кортвега-де Фриза-Бюргерса

$$u_t = -2uu_x + \varepsilon^2 u_{xx} + \lambda u_{xxx},$$

приводящие к принципиально верному описанию характерных эффектов в пространственно одномерной ситуации. Различие между этими уравнениями состоит в том, учитывается ли дисперсия среды или нет (ε, λ – коэффициенты, постоянные для однородных сред, и связанные с вязкостью/диссипацией и дисперсией среды, u – приведённая величина возмущения). Начально-граничная задача выглядит так:

$$u(x, 0) = a, u(0, t) = a + b \sin(kt), u(L, t) = a, u_x(L, t) = 0, L \gg 0 \quad (1)$$

Волновая картина определяется отношением $\gamma = \varepsilon^2 / \sqrt{\lambda}$. На рис. 1 изображена трансформация синусоиды в пилу при относительно малой диссипации, $\gamma = 0.22$. С увеличением расстояния x , пройденного волной, мелкие детали исходного временного профиля постепенно исчезают. На удалении от источника порядка нескольких характерных длин [5-8]. На всех рисунках движение вправо.

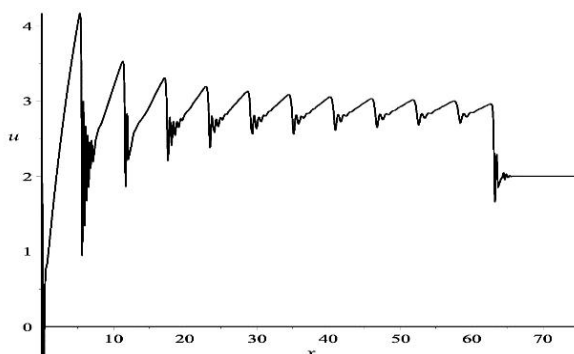


Рис. 1. Уравнение Кортвега-де Фриза-Бюргерса, $\gamma = 0.22$

Аналоги уравнение КдФ-Бюргерса для цилиндрических и сферических волн имеют вид:

$$u_t + \frac{1}{2t}u = -2uu_x + \varepsilon^2 u_{xx} + \delta u_{xxx}. \quad (2)$$

и

$$u_t + \frac{1}{t}u = -2uu_x + \varepsilon^2 u_{xx} + \delta u_{xxx}. \quad (3)$$

соответственно.

Рассмотрим начально-краевую задачу:

$$u(x, 0) = f(x), u(a, t) = l(t), u(b, t) = L(t), u_x(b, t) = R(t), x \in [a, b]. \quad (4)$$

В случае $\delta = 0$ (т.е. для уравнения Бюргерса) получается

$$u(x, 0) = f(x), u(a, t) = l(t), u(b, t) = R(t), x \in [a, b]. \quad (5)$$

Случай граничных условий $u(a, t) = A \sin(\omega t)$, $u(b, t) = 0$ и связанная с ним асимптотика представляет особый интерес. Для численного моделирования используются $x \in [0, b]$ для подходяще больших b вместо \mathbb{R}^+ .

Для $t \gg 1$ уравнения (2) и (3) стремятся к плоскому КдВ-Б; то же происходит с их решениями. Напомним, что явный вид решений типа бегущей волны для плоского КдФ-Бюргерса (1) выглядит следующим образом:

$$u_{\text{twS}}(x, t) = \frac{3\varepsilon^4 \tanh^2\left(\frac{\varepsilon^2(x-Vt-s)}{10\delta}\right)}{50\delta} - \frac{3\varepsilon^4 \tanh\left(\frac{\varepsilon^2(x-Vt-s)}{10\delta}\right)}{25\delta} + \frac{V}{2} - \frac{3\varepsilon^4}{50\delta} \quad (6)$$

Потребуем $u|_{x=+\infty} = 0$; тогда бегущая волна должна иметь скорость $V = \frac{6\varepsilon^4}{25\delta}$.

В случае $\delta = 0$ уравнение Бюргера также имеет множество решений типа бегущей волны, исчезающие в точке $x \rightarrow +\infty$. Они даются формулой

$$u_{\text{BtwS}}(x, t) = \frac{V}{2} \left[1 - \tanh\left(\frac{V}{2\varepsilon^2}(x - Vt + s)\right) \right] \quad (7)$$

Продemonстрируем, что, в случае вышеуказанного IVBP, возмущение состояния равновесия (2), (3) в конечном итоге становится очень похожим на форму этого скачка.

Здесь мы демонстрируем типичный график для цилиндрических и сферических волн Бюргера, рисунок 3.

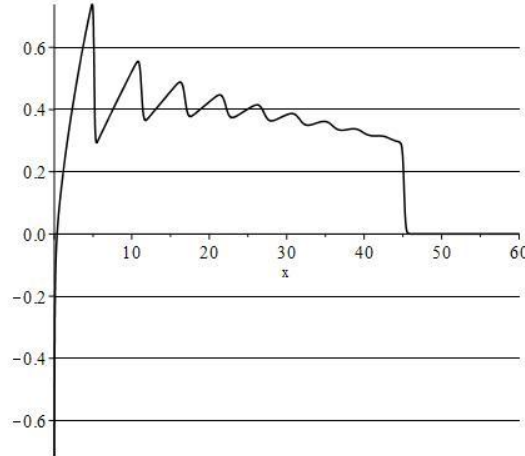


Рис. 2: Сферический Бюргерс, $u_0 = \sin t$, $\varepsilon^2 = 0.3$, $t = 150$

Обзор подобного рода примеров показывает, что, после затухания начальных колебаний, графики превращаются в монотонно падающие выпуклые линии, оканчивающиеся ударом.

Перепишем уравнения (1) – (3) в подходящую форму законов сохранения.

$$[t^n \cdot u]_t = [t^n \cdot (-u^2 + \varepsilon^2 u_x + \delta u_{xx})]_x, \quad (8)$$

$n = 0, 1/2, 1$ для плоского, цилиндрического и сферического случаев соответственно.

Следовательно, для решений приведенных выше уравнений имеем

$$\oint_{\partial D} t^n \cdot [u dx + (\varepsilon^2 u_x - u^2 + \delta u_{xx}) dt] = 0, \quad (9)$$

где D - прямоугольник

$$\{0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}.$$

Принимая во внимание начальное значение/граничные условия $u(x, 0) = u(+\infty, t) = 0$, для $L = +\infty$ интегралы преобразуются к виду

$$\frac{1}{T} \int_0^{+\infty} u(x, T) dx = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{t^n} t^n (-\varepsilon^2 u_x(0, t) + u^2(0, t) - \delta u_{xx}(0, t)) dt. \quad (11)$$

Правая часть (11) - это правая часть среднего значения (10). В некоторых простых случаях ее можно вычислить или оценить. Для решения с постоянным условием на границе $u(0, t) = M$.

Для получившейся волны сжатия $u_x(0, t) = 0$ правая часть (8) равна

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{M^2}{t^n} t^n dt = \frac{M^2}{n+1} \quad (12)$$

Как видно на рисунке 3, для периодического граничного условия, после затухания начальных колебаний графики становятся монотонными выпуклыми линиями, которые начинаются приблизительно на высоте $A/2$ и заканчиваются при $x = V \cdot T$ и на высоте V . Эти монотонные линии очень похожи на графики решений с постоянным условием на границе.

На графиках решений, можно ясно видеть, что монотонная часть и ее головной удар развиваются как гомотетическое преобразование исходной конфигурации. Итак, мы ищем решения вида $u(x, t) = u\left(\frac{x}{t}\right)$. Подставляя его в уравнения (1)–(3), получаем уравнение

$$-y' \frac{x}{t^2} + \frac{ny}{t} = \frac{2yy'}{t} + \frac{\varepsilon^2 y''}{t^2} + \frac{\delta y'''}{t^3}, \quad (13)$$

или

$$-\xi y' + ny = 2yy' + \frac{\varepsilon^2 y''}{t} + \frac{\delta y'''}{t^2}, \quad (14)$$

для $y = y(\xi)$ и $n = 0, 1/2, 1$.

При достаточно большом t мы можем опустить два последних слагаемых. Отсюда следует, что подходящими решениями вышеуказанных обыкновенных дифференциальных уравнений являются

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \quad n = 0, \quad \text{для плоских волн;} \\ u_2(x, t) &= -\frac{2 + \sqrt{C_2 \xi + 4}}{C_2}, \quad C_2 \in \mathbb{R}, \quad n = \frac{1}{2}, \quad \text{для цилиндрических и} \\ u_3(x, t) &= \exp\left(\text{LambertW}\left(-\frac{\xi}{2} e^{-\frac{C_3}{2}}\right) + \frac{C_3}{2}\right), \quad C_3 \in \mathbb{R}, \quad n = 1 \end{aligned}$$

для сферических.

Пусть V - скорость распространения сигнала в среде. Поскольку для передней ударной волны $x = Vt$ и $u = V$ имеем условие нахождения C_i , а именно $y(V) = V$. Отсюда следует, что $C_1 = V$, $C_2 = -\frac{3}{V}$, $C_3 = \ln(V) + \frac{1}{2}$.

Для плоских волн это соответствует решению бегущей волны классического уравнения Бюргера.

Для цилиндрических волн монотонная часть задается как

$$u_2 = \frac{1}{3} \left(2V + V \sqrt{4 - \frac{3x}{Vt}} \right);$$

для сферических волн

$$\begin{aligned} u_3 &= V\sqrt{e} \exp\left(\text{LambertW}\left(-\frac{x}{2Vt\sqrt{e}}\right)\right). \\ u_2|_{x=0} &= \frac{4V}{3} \quad \text{и} \quad u_3|_{x=0} = V\sqrt{e} \approx 1.65V. \end{aligned} \quad (15)$$

Формулы (15) показывают, что скорость пропорциональна амплитуде в начале колебаний. И не зависит от частоты, которая вместе с амплитудой определяет колеблющуюся часть решений; подробнее об этом ниже.

Наличие переднего ударного фронта позволяет использовать его отражение для зондирования препятствий в нефтеносных слоях. Так, гладкая часть периодического граничного решения заканчивается скачком, который движется с постоянной скоростью и амплитудой, подобно как передней части бегущей волны Бюргера (7). Можно усечь гомотетическое решение, умножив его на (нормализованную) TWS Бюргера. А именно положить

Для плоских волн

$$\tilde{u}_1 = \frac{V}{2} \left[1 - \tanh\left(\frac{V}{2\varepsilon^2}(x - Vt + s)\right) \right]$$

Для цилиндрических волн

$$\tilde{u}_2 = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh\left(\frac{V}{\varepsilon^2}(x - Vt)\right) \right] \cdot \frac{1}{3} \left(2V + V \sqrt{4 - \frac{3x}{Vt}} \right); \quad (16)$$

Для сферических

$$\tilde{u}_3 = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh\left(\frac{V}{\varepsilon^2}(x - Vt)\right) \right] \cdot V\sqrt{e} \exp\left(\text{LambertW}\left(-\frac{x}{2Vt\sqrt{e}}\right)\right). \quad (17)$$

Эта конструкция дает приближение с поразительной точностью, более того, очевидно, что \tilde{u}_2, \tilde{u}_3 аккуратно представляют медианные линии приближенных решений на всем их диапазоне. Напомним, что эти медианы можно вычислить независимо с помощью правой части (11).

Численные эксперименты показывают, что для граничного условия $u|_{x=0} = A \sin(t)$ такое значение равно $M \approx A \cdot a$, где $a \approx 0.467$ это среднее значение для условия $1 \cdot \sin(t)$. То есть M зависит от A почти линейно.

Это значение может быть получено через скорость головной ударной волны, которая, в свою очередь, может быть измерена с большой точностью по расстоянию, пройденному передним краем волны за достаточно долгое время. Наличие переднего ударного фронта позволяет использовать его отражение для зондирования препятствий в нефтеносных слоях.

Благодаря значительному набору симметрий уравнение имеет значительный запас автомодельных решений (в том числе, типа бегущих ударных волн, что следует из наличия галилеевой симметрии), а благодаря наличию линеаризующего преобразования Коула-Хопфа известны многие точные решения. По этой причине уравнение также использовалось для сравнения нескольких численных алгоритмов. В последние несколько лет численное решение системы многомерных уравнений Бюргерса привлекло большое внимание и привело к различным методам конечных разностей, конечно-элементных и граничных элементов.

Двумерное уравнения Бюргерса имеет вид

$$\begin{aligned} u_t &= -uu_x - vv_y + \frac{1}{R}(u_{xx} + u_{yy}) \\ v_t &= -uv_x - vv_y + \frac{1}{R}(u_{xx} + u_{yy}) \end{aligned}$$

Здесь неизвестные функции u, v зависят от x, y, t и R – число Рейнольдса. Начально-граничная задача на области D формулируется так:

$$u|_{\partial D} = f(x, y, t)|_{\partial D}, v|_{\partial D} = g(x, y, t)|_{\partial D},$$

где f и g – известные функции. Конкретно, для задачи моделирующей опускной вибратор, область представляет собой кольцо, а границей является пара концентрических окружностей; на меньшей окружности задаётся гармоническое колебание, а на внешней окружности (как и внутри) изначально нулевые значения

Эта модель ближе к реальным задачам, однако не учитывает вероятных неоднородностей пластов, которые превращают постоянные коэффициенты уравнений в функции пространственных переменных (или, даже, в динамически изменяющиеся функции). Принципиальные эффекты, возникающие в неоднородной среде, изучались в [4, 6].

Благодаря значительному набору симметрий уравнение имеет значительный запас автомодельных решений (в том числе, типа бегущих ударных волн, что следует из наличия галилеевой симметрии), а благодаря наличию линеаризующего преобразования Коула-Хопфа известны многие точные решения. В последние несколько лет численное решение системы многомерных уравнений Бюргерса привлекло большое внимание и привело к различным методам конечных разностей, конечно-элементных и граничных элементов.

1.2 Модель Хохлова-Заболоцкой

Изучение волновых взаимодействий в средах до последней четверти прошлого века основывалось на простых теоретических моделях. Рассматривались плоские или другие одномерные (сферически и цилиндрически симметричные) волны без дисперсии. Однако в реальных условиях приходится иметь дело с пучками, на эволюции которых сказывается дифракция, когда прежние упрощения оказываются чересчур грубыми; в частности, при моделировании колебаний, создаваемых генератором, погруженным в скважину.

Согласно [2] суперпозиция плоских волн с близкими по направлениям волновыми векторами может дать локализованное в поперечном направлении поле — волновой пучок с почти плоским волновым фронтом. Причем поперечные размеры пучка значительно превышают длину волны, но малы по сравнению с длиной пучка. Возникает самофокусировка вследствие противоположно направленного взаимодействия нелинейной рефракции и дифракционной расходимости. Это проявляется в том, что пучок обладает малой пространственной расходимостью, что позволяет и сохраняет высокую фокусировку энергии, близкую к изначальной. Эти эффекты описываются уравнением Хохлова-Заболоцкой, которое в безразмерной форме записывается так

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = \frac{N}{4} \left(\frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Здесь $N/4$ -параметр, аналогичный обратной величине коэффициента Рейнольдса, x – направление вдоль оси пучка, а y – поперечное направление. Как отмечено в [1], уравнение учитывает одновременно и нелинейные искажения, и поперечные изменения возмущения, обусловленные

дифракционной расходимостью. Поэтому можно утверждать, что уравнение Хохлова—Заболоцкой описывает во втором приближении распространение ограниченных пучков в нелинейных средах без потерь, т. е. является приближенным уравнением нелинейной акустики ограниченных пучков.

Для создания сильных волновых полей используются фокусирующие устройства, применяемые во многих ультразвуковых технологиях и приборах медицинской техники. В процессе фокусировки происходит концентрация волновой энергии, и роль нелинейных эффектов существенно возрастает. Кроме них, важны линейные диссипативные свойства среды, а в фокальной области принципиален учет дифракции.

Общее решение уравнения ХЗ в аналитическом виде представляется недостижимым; до настоящего времени не найдено общего точного решения. Поэтому усилия были направлены на получение точных частных решений (как правило, не допускающих физической интерпретации), асимптотических и численных решений этой проблемы (см. [2]).

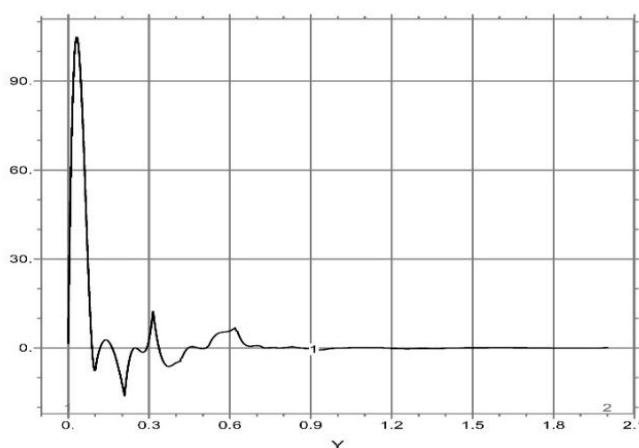


Рис. 4. Характерный пример слабых разрывов для уравнения Хохлова-Заболоцкой. $N/4=0.05$. Y - расстояние до оси пучка, возмущения сосредоточены в зоне $Y < 2$

Для численного моделирования обычно выбираются данные вида $u|_{x=0} = \varphi(y)F(\theta)$. Приведем пример такого моделирования в среде FlexPDE7 для $u|_{y=0} = e^{-x^2} \sin \theta$.

2 Заключение

Основным методом повышения нефтеотдачи является заводнение (закачка воды и водные растворы активных реагентов в сочетании с тепловыми и другими физико-химическими воздействиями) через нагнетательные скважины. Широкое применение такого управляющего воздействия в свое время позволило значительно повысить эффективность разработки нефтяных месторождений. Однако за годы промышленной разработки нефтяных месторождений их основные эксплуатационные объекты достигли поздней стадии, которая характеризуется высоким истощением извлекаемых запасов залежей нефти и значительным обводнением продукции скважин.

Широкое применение волновой технологии в нефтяной промышленности началось в 80-х годах прошлого века. В частности, проводились обработки пласта в призабойных зонах скважин волновыми генераторами, с целью очистки призабойной зоны от кольматационных загрязнений. При этом неоднократно наблюдалось увеличение дебитов не только в той скважине, которая подвергалась обработке, но и в окружающих ее скважинах. В этих удаленных скважинах наблюдалось также повышение нефти и снижение обводненности. Таким образом, была показана возможность охвата волновым воздействием системы, связанных гидродинамическим влиянием скважин. Повышение нефтеотдачи было зафиксировано и при обработке месторождений волнами, возбуждаемых с помощью гидроударов. Вышеуказанные результаты свидетельствуют, что волновое воздействие на пласт способно создать в поровом пространстве силы, значительно превышающие силы, существующие при стационарной фильтрации, что создает предпосылки для возможности освобождения капиллярно удерживаемой нефти и повышения нефтеотдачи. Однако, в настоящее время исследований механизмов воздействия волн на жидкость, удерживаемую в поровом пространстве, недостаточно. По существу, научные основы этого важного направления не созданы. Также недостаточно изучены волноводные свойства пластов, обусловленные их природными

неоднородностями: вертикальной и горизонтальной слоистостью, наличием пропластков, трещин и разломов.

В дальнейших исследованиях мы планируем применить теорию пилообразных ударных волн к следующим задачам / целям:

- повышению нефтеотдачи при разработке неоднородных (трещиноватых и трещиновато-пористых) нефтенасыщенных резервуаров с учетом капиллярного взаимодействия между породой и фильтрующимися флюидами;
- сейсмическим исследованиям для выявления зон не охваченных фильтрационным процессами;
- вытеснению нефти активными реагентами и доизвлечения этих остаточных запасов, с применением физико-химических, тепловых, волновых и др. управляющих воздействий.

Литература

1. Шарфарец Б. П. О динамике ударных волн в жидкости. обзор. // Научное приборостроение, 26, № 4, 2016 - С. 43–5
2. Руденко О.В. Нелинейная пилообразные волны // УМН, 165, № 9, 1995 – С. 1011-1036
3. Samokhin A. V., The KdV soliton crosses a dissipative and dispersive border // arXiv:2002.00432 [nlin.SI], 2020. 11 pages
4. Samokhin A. V., Soliton transmutations in KdV--Burgers layered media, Journal of Geometry and Physics, 148, February 2020, 9 pages, 103547. <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2019.103547>
5. Samokhin A. V., Reflection and refraction of solitons by the KdV–Burgers equation in nonhomogeneous dissipative media, Theoretical and Mathematical Physics, 197(1): 1527–1533 (2018), DOI: 10.1134/S0040577918100094
6. Samokhin A., Nonlinear waves in layered media: solutions of the KdV -- Burgers equation // Journal of Geometry and Physics 130 (2018) pp. 33–39
7. Сиротюк М.Г. Акустическая кавитация. - М.: Наука, 2008. 271 с.