

СЕКЦИЯ 5: НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ КРУПНОМАСШТАБНЫМИ СИСТЕМАМИ

УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ С УЧЕТОМ ПРОЕКТНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ³¹

Антипов А.С., Краснова С.А.

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65
scholess18@mail.ru, skrasnova@list.ru*

Пивнева С.В.

*Российский государственный социальный университет,
Россия, г. Москва, ул. Вильгельма Пика, д. 4, стр. 1
pivnevasv@rgsu.net*

Аннотация: Для электромеханического объекта автоматического управления, функционирующего в условиях параметрических и внешних возмущений, разработана декомпозиционная процедура синтеза нелинейных локальных связей, обеспечивающая отслеживание регулируемой переменной заданного сигнала с заданной точностью при наличии ограничений на переменные состояния и управления. Приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: нелинейная система, слежение, декомпозиция, инвариантность, сигма-функция, ограничения на переменные состояния.

Введение

При проектировании систем автоматического управления следует учитывать ограничения на переменные состояния и управления, обусловленные физикой процесса, мощностью исполнительных устройств, технологическими требованиями и соображениями безопасности. Синтез системы слежения с учетом заданных проектных ограничений является особо актуальной, а также нетривиальной задачей, особенно при воздействии на объект параметрических и внешних неконтролируемых возмущений.

Одним из стандартных методов учета проектных ограничений является метод инвариантных эллипсоидов с использованием техники линейных матричных неравенств (LMI) [1-3]. Если начальное состояние системы принадлежит эллипсоиду, траектория системы не покидает его, и достигается цель управления при допустимых возмущениях, то такой эллипсоид называют инвариантным. Нахождение инвариантных эллипсоидов осуществляется с помощью техники LMI, охватывающей различные постановки задач анализа и синтеза и применимой к системам с большими размерностями. Следует отметить относительную простоту учета ограничений при наличии инвариантного эллипсоида. Однако, не всегда возможно построить инвариантный эллипсоид, включенный в множество заданных проектных ограничений. Кроме того, часто предъявляется требование к определенности параметров системы, что не всегда выполняется в практических приложениях.

Другой подход к учету проектных ограничений основан на методах оптимального управления [4-7]. К ним относятся: принцип максимума Понтрягина [5], прямые методы синтеза [6], управление с прогнозирующей моделью (MPC) [7]. Данные подходы, которые различаются по вычислительной сложности, точности и скорости сходимости, также предполагают параметрическую определенность математической модели объекта управления.

При воздействии на объект параметрических и внешних неконтролируемых возмущений естественным подходом к управлению выступают «силовые» методы с организацией скользящего режима [8-9]. В работах [10-11] идеология скользящих режимов используется для учета заданных проектных ограничений как в сочетании с подходом MPC [10], так и обособленно от него [11]. Идея заключается в построении специальной поверхности переключения и нахождении соответствующей

³¹Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-01-00363А).

области притяжения, что позволяет учитывать заданные ограничения. Однако отсутствует процедура, которая в общем случае описывает построение необходимых поверхностей переключения.

Можно сделать вывод о том, что на сегодняшний момент задача синтеза систем управления с учетом проектных ограничений в условиях параметрических и внешних возмущений фундаментально не разработана. Основные подходы основаны на численных процедурах к определенному классу упрощенных математических моделей объектов управления.

В данной работе предпринята попытка получить аналитическое решение данной проблемы на примере одноканальной нелинейной системы третьего порядка, представленной в треугольной форме вход – выход. Рассматривается задача синтеза статической обратной связи, обеспечивающей отслеживания выходной переменной заданного сигнала в условиях действия внешних и параметрических возмущений, а также с учетом ограничений на переменные состояния и управление. Задача решается в рамках блочного принципа управления [12-16]. Учет заданных проектных ограничений на этапе синтеза обеспечивается за счет выбора параметров нелинейных ограниченных S-образных сигма-функций (локальных связей), за которыми «следят» переменные состояния, которые принимаются в качестве фиктивных управлений. Амплитуды сигма-функций выбираются исходя из верхних границ в проектных ограничениях и оценок максимальной величины перерегулирования переменных состояния, основанных на предположении наихудшего изменения параметров системы. Отметим, что полученные условия на выбор параметров регулятора гарантируют тотальное выполнение ограничений в отличие от работ предыдущих авторов [15-16], где допускался незначительный выход переменных состояния за заданные границы. В качестве недостатка приведенного подхода следует отметить достаточную консервативность полученных оценок, вследствие чего могут потребоваться значительные ресурсы управления и увеличение допустимых границ в проектных ограничениях, выбираемых на этапе проектирования.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 1 приведено описание модели объекта управления и постановка задачи. В разделе 2 представлена декомпозиционная процедура синтеза следящей системы с сигмоидальными обратными связями, обеспечивающая проектные ограничения. В разделе 3 приведены результаты численного моделирования разработанного алгоритма для перевернутого маятника с учетом редуцированной динамики двигателя постоянного тока.

1 Описание модели объекта управления. Постановка задачи

В качестве объекта управления рассматривается нелинейная одноканальная система третьего порядка, представимая в треугольной (по составу аргументов функций) форме вход – выход вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, t) + b_1(x_1, t)x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, t) + b_2(x_1, x_2, t)x_3, \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3, t) + b_3(x_1, x_2, x_3, t)u, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x = \text{col}(x_1, x_2, x_3) \in X \subset R^3$ – измеряемый вектор состояния с известными начальными условиями $x_i(0)$, $i = \overline{1,3}$, X – открытая, ограниченная область, $x_1 \in R$ – выходная (регулируемая) переменная, $u \in R$ – управление; $f_i(x_1, \dots, x_i, t)$ – функции от указанных переменных вектора состояния и внешних воздействий, которые в общем случае полагаются неизвестными функциями времени, ограниченными по модулю известными константам:

$$|f_i(x_1, \dots, x_i, t)| \leq F_i = \text{const} > 0, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1,3}. \quad (2)$$

Система (1) является управляемой [12-14], а именно, $b_i(x_1(t), \dots, x_i(t), t) \neq 0, t \geq 0, i = \overline{1,3}$. Данные функции также могут содержать неопределенности, но при этом известными считаются их знаки $\text{sign} b_i(x_1(t), \dots, x_i(t), t) = \text{const}, t \geq 0$ и диапазоны изменения

$$b_{i,\min} \leq b_i(x_1, x_2, \dots, x_i, t) \leq b_{i,\max}, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1,3}. \quad (3)$$

В общем случае требование гладкости к функциям $f_i(t), b_i(t), i = \overline{1, n}$ системы (1) не предъявляется, достаточно, чтобы они были кусочно-непрерывными с конечным числом точек разрыва первого рода.

Системой (1), в частности, может быть описана динамика электромеханического объекта с одной степенью свободы, где первые два уравнения соответствуют механической подсистеме, а последнее – электрической [15].

Для объекта управления (1) ставится задача синтеза закона управления в форме статической обратной связи, обеспечивающего отслеживание выходной переменной x_1 заданного сигнала $g(t)$

$$|e_1(t)| \leq \Delta_1, \quad t > t_1 > 0, \quad e_1(t) = x_1(t) - g(t), \quad (4)$$

при наличии заданных проектных ограничений на переменные состояния и управление

$$|x_i(t)| \leq X_i = \text{const} > 0, \quad i = 2, 3; \quad |u(t)| \leq X_4 = \text{const} > 0, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

и при условии принадлежности начальных условий ограничениям

$$|x_2(0)| < X_2, \quad |x_3(0)| \leq X_3. \quad (6)$$

Следует отметить, что, во-первых, оценки (2), (3) и границы проектных ограничений (5) должны удовлетворять системе совместных неравенств, которые будут формализованы в следующем разделе. Во-вторых, при наличии ограничений нельзя обеспечить произвольную точность регулирования Δ_1 . Поэтому в следующем разделе будет получена оценка предельной возможной точности слежения с учетом (5). Проблема обеспечения заданного времени сходимости t_1 (4) или получения его оценки в работе не рассматривается.

Для решения задачи (4) не вводятся динамические модели внешних воздействий. Полагается, что задающий сигнал $g(t)$ поступает в систему слежения в реальном времени из внешнего источника, его аналитическое описание отсутствует, известны только текущие значения. Сигнал $\dot{g}(t)$ неизвестен, но ограничен известной константой:

$$|g(t)| \leq G, \quad |\dot{g}(t)| \leq G_1, \quad t \geq 0. \quad (7)$$

В следующем разделе представлен основной результат – декомпозиционная процедура синтеза сигмоидальных обратных связей, обеспечивающая –(4), (5).

2 Декомпозиционная процедура синтеза следящей системы с сигмоидальными обратными связями, обеспечивающая заданные проектные ограничения

Система (1) имеет структуру блочной формы управляемости, где переменная первого блока является регулируемой, поэтому для синтеза решения задачи слежения целесообразно использовать блочный принцип управления [12-16]. Фиктивными управлениями в i -ом уравнении (1) выступают переменные x_{i+1} следующего $(i+1)$ -го уравнения, $i = 1, 2$. С целью выполнения заданных проектных ограничений (5) стабилизирующие фиктивные управления выбираем в виде ограниченных сигма-функций [15-16]:

$$x_i^* = -\text{sign} b_{i-1} m_{i-1} \sigma(k_{i-1} e_{i-1}), \quad i = 2, 3, \quad (8)$$

где $\sigma(k_{i-1} e_{i-1}) = \frac{2}{1 + \exp(-k_{i-1} e_{i-1})} - 1$ – сигма-функция, $m_{i-1} = \text{const} > 0$ – амплитуды, отвечающие за темпы сходимости, $k_{i-1} = \text{const} > 0$ – коэффициенты наклона, выполняющие роль больших коэффициентов и определяющие точность стабилизации. Производная сигма-функции выражается через саму сигма-функцию $\sigma'(k_{ji} e_{ji}) = k_{ji} (1 - \sigma^2(k_{ji} e_{ji})) / 2$. Графики сигма-функции и ее производной приведены на рис. 1.

Как видно из рис. 1, сигма-функция $\sigma(k_{i-1} e_{i-1})$ может быть условно разделена на следующие части: при $|e_{i-1}| \leq 2, 2 / k_{i-1}$ она близка к линейной функции, при $|e_{i-1}| > 2, 2 / k_{i-1}$ она близка к постоянной. Для нее и производной справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} 0,8 < |\sigma(kx)| < 1, \quad 0 < \sigma'(kx) < 0,18k, \quad |x| > 2, 2 / k; \\ 0,36k |x| \leq |\sigma(kx)| \leq 0,8, \quad 0,18k \leq \sigma'(kx) \leq \sigma'(0) = k / 2, \quad |x| \leq 2, 2 / k. \end{aligned} \quad (9)$$

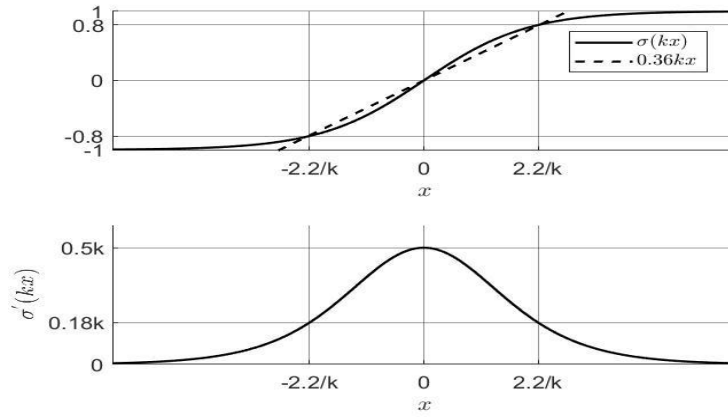


Рис. 1. Графики сигма-функции $y = \sigma(kx)$ и ее производной $y = \sigma'(kx)$.

В пределе при $k_{i-1} \rightarrow +\infty$ сигма-функция стремится к функции знака. Этот факт позволяет с помощью непрерывных сигмоидальных обратных связей обеспечить в замкнутой системе свойства, близкие к свойствам системам с разрывными управлениями, функционирующим в скользящем режиме: декомпозицию общего движения на разнотемповые составляющие, инвариантность с заданной точностью по отношению к параметрическим неопределенностям и внешним возмущения [8, 9].

Введем замену переменных – ошибку слежения и невязки между переменными x_i и стабилизирующими сигмоидальными фиктивными управлениями (8):

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 - g, \\ e_i &= x_i - x_i^* = x_i + \text{sign}b_{i-1}m_{i-1}\sigma(k_{i-1}e_{i-1}), \quad i = 2, 3. \end{aligned} \quad (10)$$

Для выполнения ограничений (5) на управление, истинное управление также принимаем в виде ограниченной сигма-функции

$$u = -\text{sign}b_3m_3\sigma(k_3e_3), \quad (11)$$

где $k_3 = \text{const} > 0$, $m_3 = \text{const} > 0$.

Таким образом, используя (10), (11), приходим к следующей замкнутой системе (1):

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= f_1 + b_1x_2 - \dot{g} = -|b_1|m_1\sigma(k_1e_1) + f_1 - \dot{g} + b_1e_2; \\ \dot{e}_2 &= f_2 + b_2x_3 + \Lambda_1 = -|b_2|m_2\sigma(k_2e_2) + f_2 + \Lambda_1 + b_2e_3; \\ \dot{e}_3 &= f_3 + b_3u + \Lambda_2 = -|b_3|m_3\sigma(k_3e_3) + f_3 + \Lambda_2, \end{aligned} \quad (12)$$

где слагаемые

$$\Lambda_i = \text{sign}b_i \cdot m_i \frac{k_i(1 - \sigma^2(k_i e_i))}{2} \dot{e}_i, \quad i = 1, 2 \quad (13)$$

являются производными соответствующих фиктивных управлений (8), которые возникают при переходе к новому координатному базису (10).

Формализуем выбор параметров обратных связей k_i и m_i , $i = \overline{1, 3}$, обеспечивающих стабилизацию ошибки слежения (4) с некоторой точностью и выполнение ограничений (5).

В соответствии с блочным принципом управления, в замкнутой системе (12) для достижения (4) необходимо обеспечить следующую последовательность сходимости невязок:

$$|e_3(t)| \leq \Delta_3 (t \geq t_3 > 0) \Rightarrow |e_2(t)| \leq \Delta_2 (t \geq t_2 > t_3) \Rightarrow |e_1(t)| \leq \Delta_1 (t \geq t_1 > t_2), \quad (14)$$

где значения $\Delta_i = \text{const} > 0$, $t_i = \text{const} > 0$, $i = \overline{1, 3}$ будем уточнять далее.

Предварительно зафиксируем следующую связь k_i с Δ_i :

$$k_i^* = 2, 2 / \Delta_i, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (15)$$

В силу (2), (3), (9) для системы (12) справедливы оценки:

$$\begin{aligned} e_1 \dot{e}_1 &\leq |e_1| (-0,8|b_1|m_1 + F_1 + G_1 + |b_1| \cdot |e_2|); \\ e_2 \dot{e}_2 &\leq |e_2| (-0,8|b_2|m_2 + F_2 + |\Lambda_1| + b_2 \cdot |e_3|); \\ e_3 \dot{e}_3 &\leq |e_3| (-0,8|b_3|m_3 + F_3 + |\Lambda_2|). \end{aligned} \quad (16)$$

С учетом оценок (16), следующие условия на выбор амплитуд

$$\begin{aligned} 0,8b_{1,\min}m_1 &> F_1 + G_1 + b_{1,\min}\Delta_2, |e_2| \leq \Delta_2; \\ 0,8b_{2,\min}m_2 &> F_2 + |\Lambda_1| + b_{2,\min}\Delta_2, |e_3| \leq \Delta_3; \\ 0,8b_{3,\min}m_3 &> F_3 + |\Lambda_2| \end{aligned} \quad (17)$$

обеспечивают выполнение достаточных условий $e_i \dot{e}_i < 0$, $i = \overline{1,3}$ [9] последовательной сходимости невязок в области (14). В частном случае $|e_i(0)| \leq \Delta_i, i = \overline{1,3}$ выполнение (15), (17) обеспечит $|e_i(t)| \leq \Delta_i, i = \overline{1,n}$ при $t \geq 0$. В общем случае $|e_i(0)| > \Delta_i, i = \overline{1,3}$, который рассматривается ниже, в рамках данных построений монотонный переходный процесс гарантируется только для $e_3(t)$. Пока переменные нижних блоков системы (12) не достигнут установленных окрестностей нуля (14), переменные верхних блоков растут по модулю и достигают максимального значения не позже, чем в следующие моменты времени:

$$|e_3(t)| \leq |e_3(0)| = e_{3,\max}, |e_i(t)| \leq |e_i(t_{i+1})| = e_{i,\max}, i = 2,1, t \geq 0. \quad (18)$$

В силу построений (10). начальное значение априори известно только для ошибки слежения, для остальных невязок имеются только их оценки:

$$e_1(0) = x_1(0) - g(0), |e_i(0)| \leq |x_i(0)| + m_{i-1} \sigma(k_{i-1}^* |e_{i-1}(0)|) \leq |x_i(0)| + m_{i-1}, i = 2,3. \quad (19)$$

Принимая во внимание (12), (17), (19) и учитывая, что собственные движения в замкнутой системе (12) устойчивые, составим оценки максимальных значений (18):

$$\begin{aligned} e_{1,\max} &= |e_1(0)| + \Delta_{e_1}, \Delta_{e_1} = b_{1,\max}(e_{2,\max} - \Delta_2)t_2; \\ e_{2,\max} &= |x_2(0)| + m_1 + \Delta_{e_2}, \Delta_{e_2} = b_{2,\max}(e_{3,\max} - \Delta_3)t_3; \\ e_{3,\max} &= |x_3(0)| + m_2, \end{aligned} \quad (20)$$

где величины Δ_{e_1} , Δ_{e_2} определяют отклонение ошибки слежения e_1 и невязки e_2 от начальных условий.

Дадим оценки производных фиктивных управлений (13). Они отличаются на разных интервалах и зависят от соответствующих оценок производных сигма-функций и производных соответствующих невязок (12). Для производных невязок $e_i(t)$, $i = 1,2$ с учетом (17) справедливы оценки:

$$\begin{aligned} t \in [0; t_2]: |\dot{e}_1(t)| &\leq \underbrace{F_1 + G_1 + b_{1,\max}\Delta_2}_{< 0,8b_{1,\min}m_1} + b_{1,\max}(e_{2,\max} - \Delta_2) + b_{1,\max}m_1 < \\ &< 2b_{1,\max}m_1 + b_{1,\max}(e_{2,\max} - \Delta_2), \\ t \geq t_2: |\dot{e}_1(t)| &\leq F_1 + G_1 + b_{1,\max}\Delta_2 + b_{1,\max}m_1 < 2b_{1,\max}m_1; \\ t \in [0; t_3]: |\dot{e}_2(t)| &= \underbrace{F_2 + |\Lambda_1| + b_{2,\max}\Delta_3}_{< 0,8b_{2,\min}m_2} + b_{2,\max}(e_{3,\max} - \Delta_3) + b_{2,\max}m_2 < \\ &< 2b_{2,\max}m_2 + b_{2,\max}(e_{3,\max} - \Delta_2), \\ t \geq t_3: |\dot{e}_2(t)| &= F_2 + |\Lambda_1| + b_{2,\max}\Delta_3 + b_{2,\max}m_2 < 2b_{2,\max}m_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Для производной сигма-функции в силу (9) на указанных интервалах имеем:

$$\begin{aligned} |e_i(t)| &> 2,2/k_i^*, t \in [0; t_i]: 0 < 0,5k_i^*(1 - \sigma^2(k_i^*e_i)) < 0,18k_i^*, \\ |e_i(t)| &\leq 2,2/k_i^*, t \geq t_i: 0,18k_i^* \leq 0,5k_i^*(1 - \sigma^2(k_i^*e_i)) \leq 0,5k_i^*, i = 1,2. \end{aligned} \quad (22)$$

Объединяя (21) – (22), получим оценки производных фиктивных управлений (13) на указанных интервалах:

$$|\Lambda_i| = m_i \frac{k_i^* (1 - \sigma^2(k_i^* e_i))}{2} |\dot{e}_i| \leq \begin{cases} 0,36k_i^* m_i^2 b_{i,\max} + 0,18k_i^* m_i b_{i,\max} (e_{i+1,\max} - \Delta_{i+1}), t \in [0; t_{i+1}); \\ 0,36k_i^* m_i^2 b_{i,\max}, t \in [t_{i+1}; t_i); \\ k_i^* m_i^2 b_{i,\max}, t \geq t_i; i = 1, 2. \end{cases}$$

Для того чтобы единообразно принять в качестве оценки

$$|\Lambda_i| \leq k_i^* m_i^2 b_{i,\max}, t \geq 0; i = 1, 2, \quad (23)$$

нужно обеспечить $0,18k_i^* m_i b_{i,\max} (e_{i+1,\max} - \Delta_{i+1}) \leq 0,64k_i^* m_i^2 b_{i,\max} \Rightarrow e_{i+1,\max} - \Delta_{i+1} \leq 3,5m_i, i = 1, 2$. С этой целью введем ограничения на пиковые значения невязок, несколько снизив предельные оценки для удобства расчетов:

$$e_{i,\max} \leq 3m_{i-1}, i = 2, 3. \quad (24)$$

В дополнение к (24) получим условия, необходимые для выполнения ограничений на переменные состояния и управление (5). Ограничение на управление $|u| \leq X_4$ выполним за счет ограничения амплитуды истинного сигмоидального управления:

$$m_3 \leq X_4. \quad (25)$$

Для выполнения ограничения $|x_3(t)| \leq X_3$ с учетом условий (24) и (6) необходимо:

$$|x_3(0)| + m_2 \leq 3m_2 \Rightarrow |x_3(0)| \leq 2m_2 \leq X_3 \Rightarrow m_2 \leq 0,5X_3. \quad (26)$$

Для выполнения $|x_2(t)| \leq X_2$ следует ограничить отклонение Δ_{e_2} :

$$0 < \Delta_{e_2} \leq X_2 - |x_2(0)|. \quad (27)$$

В силу (24) и (27) приходим к условию на m_1 :

$$|x_2(0)| + m_1 + \Delta_{e_2} \leq 3m_1 \Rightarrow \Delta_{e_2} \leq 2m_1 - |x_2(0)| \leq X_2 - |x_2(0)| \Rightarrow m_1 \leq 0,5X_2. \quad (28)$$

Таким образом, для выполнения (24) и ограничений на переменные состояния необходимо ограничить амплитуды m_1, m_2 согласно (28), (26) и величину отклонения Δ_{e_2} согласно (27). Чтобы учесть ограничение (27), скорректируем последнее достаточное условие сходимости (17) так, чтобы выбором m_3 можно было обеспечить любое желаемое отклонение $\Delta_{e_2}^*$ из (27). Искомый выбор амплитуды m_3 будем производить из оценки решения (12). Так, на интервале $t \in [0; t_3]$ переменная $e_3(t)$ монотонно убывает. При $t \geq t_3$ с учетом (9), (23) справедлива оценка

$$|e_3(t)| \leq |e_3(0)| - (0,8b_{3,\min} m_3 - F_3 - b_{2,\max} m_2^2 k_2^*) t_3,$$

откуда находим оценку момента времени t_3 попадания в область $|e_3(t)| \leq \Delta_3$:

$$t_3 \leq \frac{|e_3(0)| - \Delta_3}{0,8b_{3,\min} m_3 - F_3 - b_{2,\max} m_2^2 k_2^*} \leq \frac{|x_3(0)| + m_2 - \Delta_3}{0,8b_{3,\min} m_3 - F_3 - b_{2,\max} m_2^2 k_2^*}. \quad (29)$$

Из (23) следует, что

$$\Delta_{e_2} = b_{2,\max} (|x_3(0)| + m_2 - \Delta_3) t_3. \quad (30)$$

Тогда, подставляя оценку момента времени t_3 (29) в (30), потребуем обеспечить выполнение условия $\Delta_{e_2} \leq \Delta_{e_2}^*$, где $\Delta_{e_2}^*$ – желаемое отклонение (27), что определяет нижнюю оценку для выбора m_3 :

$$b_{2,\max} (|x_3(0)| + m_2 - \Delta_3) \frac{|x_3(0)| + m_2 - \Delta_3}{0,8b_{3,\min} m_3 - F_3 - b_{2,\max} m_2^2 k_2^*} \leq \Delta_{e_2}^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_3 \geq 1,25 \left(\frac{F_3 + b_{2,\max} m_2^2 k_2^*}{b_{3,\min}} + \frac{b_{2,\max} (|x_3(0)| + m_2 - \Delta_3)^2}{b_{3,\min} \Delta_{e_2}^*} \right). \quad (31)$$

Отметим, что нижние оценки для выбора амплитуд m_2 и m_1 принимаются согласно (17). Выбор амплитуд из данных оценок обеспечивает сходимость переменных e_2 и e_1 за некоторое время t_2, t_1 (14), которое в данной работе не конкретизируем.

Таким образом, полученное условие (31) на выбор m_3 обеспечивает желаемое отклонение $\Delta_{e_2}^*$ (27). С учетом данного условия, а также (17), (25), (26), (28), неравенства на выбор амплитуд, гарантирующие стабилизацию ошибки слежения (14) и выполнение ограничений (5), имеют вид:

$$1,25 \left(\Delta_2 + \frac{F_1 + G_1}{b_{1,\min}} \right) < m_1 \leq 0,5 X_2,$$

$$1,25 \left(\Delta_3 + \frac{F_2 + b_{1,\max} m_1^2 k_1^*}{b_{2,\min}} \right) \leq m_2 \leq 0,5 X_3,$$

$$1,25 \left(\frac{F_3 + b_{2,\max} m_2^2 k_2^*}{b_{3,\min}} + \frac{b_{2,\max} (|x_3(0)| + m_2 - \Delta_3)^2}{b_{3,\min} \Delta_{e_2}^*} \right) \leq m_3 \leq X_4. \quad (32)$$

Возможность решения задачи (14), (5), зависит от существования непустых диапазонов на выбор амплитуд (32). Получим требования к величинам $\Delta_i, i = \overline{1,3}$ и границам $X_i, i = \overline{2,4}$, которые обеспечат существование данных непустых диапазонов.

Из первого неравенства (32) для существования выбора

$$0 < \Delta_2 < 0,4 X_2 - (F_1 + G_1) / b_{1,\min} \quad (33)$$

необходимо:

$$X_2 > 2,5(F_1 + G_1) / b_{1,\min}. \quad (34)$$

Из второго неравенства (32) с учетом (28)

$$m_1^2 \leq 0,25 X_2^2$$

для существования выбора

$$0 < \Delta_3 < 0,4 X_3 - \frac{F_2 + 0,25 b_{1,\max} X_2^2 k_1^*}{b_{2,\min}} \quad (35)$$

необходимо:

$$0 < k_1^* < \frac{1,6 b_{2,\min} X_3 - 4 F_2}{b_{1,\max} X_2^2}, \quad (36)$$

откуда следует

$$X_3 > \frac{2,5 F_2}{b_{2,\min}}. \quad (37)$$

Из (36) в силу (15) также следует неравенство на допустимую точность Δ_1 :

$$\Delta_1 > \frac{2,2 b_{1,\max} X_2^2}{1,6 b_{2,\min} X_3 - 4 F_2}. \quad (38)$$

Из третьего условия (32) с учетом (26)

$$m_2^2 \leq 0,25 X_3^2, (|x_3(0)| + m_2 - \Delta_3)^2 \leq (|x_3(0)| + 0,5 X_3)^2$$

получаем неравенство

$$0 < k_2^* < \frac{3,2b_{3,\min}X_4 - 4F_3}{b_{2,\max}X_3^2} - \frac{4(|x_3(0)| + 0,5X_3)^2}{(X_2 - |x_2(0)|)X_3^2},$$

из которого следует

$$X_4 > X_{41} = \frac{1}{3,2b_{3,\min}} \left(4F_3 + \frac{4b_{2,\max}(|x_3(0)| + 0,5X_3)^2}{X_2 - |x_2(0)|} \right), \quad (39)$$

и которое с учетом (15) ограничивает достижимую точность стабилизации невязки

$$\Delta_2 > \frac{2,2b_{2,\max}X_3^2(X_2 - |x_2(0)|)}{(3,2b_{3,\min}X_4 - 4F_3)(X_2 - |x_2(0)|) - 4b_{2,\max}(|x_3(0)| + 0,5X_3)^2}. \quad (40)$$

Следовательно, из (33), (38), (40), получаем следующие неравенства на величины Δ_i , $i = \overline{1,3}$:

$$\underline{\Delta}_1 < \Delta_1, \quad \underline{\Delta}_2 < \Delta_2 < \overline{\Delta}_2, \quad 0 < \Delta_3 < \overline{\Delta}_3,$$

$$\underline{\Delta}_1 = \frac{2,2b_{1,\max}X_2^2}{1,6b_{2,\min}X_3 - 4F_2},$$

$$\underline{\Delta}_2 = \frac{2,2b_{2,\max}X_3^2(X_2 - |x_2(0)|)}{(3,2b_{3,\min}X_4 - 4F_3)(X_2 - |x_2(0)|) - 4b_{2,\max}(|x_3(0)| + 0,5X_3)^2}, \quad (41)$$

$$\overline{\Delta}_2 = 0,4X_2 - (F_1 + G_1)/b_{1,\min},$$

$$\overline{\Delta}_3(\Delta_1) = 0,4X_3 - \frac{F_2 + 0,55b_{1,\max}X_2^2}{b_{2,\min}\Delta_1}.$$

Из неравенства $\underline{\Delta}_2 < \overline{\Delta}_2$ следует, что ресурсы управления X_4 (39) необходимо увеличить для существования выбора $\underline{\Delta}_2 < \Delta_2 < \overline{\Delta}_2$:

$$X_4 > X_{41} + \frac{1}{3,2b_{3,\min}} \cdot \frac{2,2b_{2,\max}X_3^2(X_2 - |x_2(0)|)}{(0,4X_2 - (F_1 + G_1)/b_{1,\min})(X_2 - |x_2(0)|)}. \quad (42)$$

Таким образом, если на этапе проектирования значения X_i , $i = \overline{2,4}$ удовлетворяют неравенствам (34), (37), (42), то существуют такие значения Δ_i , $i = \overline{1,3}$ (41), которые гарантируют существование непустых диапазонов (32). При этом граница $\underline{\Delta}_1$ определяет предельную точность, которая может быть достигнута при имеющихся ограничениях.

Отметим, что если вместо сигмоидального закона управления (11) истинное управление выбирается в виде разрывной функции

$$u = -\text{sign}b_3m_3\text{sign}e_3, \quad (43)$$

что характерно для электрических исполнительных устройств, работающих в ключевом режиме, то неравенство на выбор m_3 в (32) заменяются следующими

$$\frac{F_3 + b_{2,\max}m_2^2k_2^*}{b_{3,\min}} + \frac{b_{2,\max}(|x_3(0)| + m_2 - \Delta_3)^2}{b_{3,\min}\Delta_{e_2}^*} \leq m_3 \leq X_4. \quad (44)$$

Выбор m_3 из (44) теоретически обеспечивает идеальный скользящий режим на поверхности $e_3 = 0$ [8, 9], а при вычислительной реализации – реальный скользящий режим $|e_3(t)| \leq \Delta_3$, где величина неидеальностей Δ_3 прямо пропорциональна выбранному шагу интегрирования. Тогда неравенства на выбор амплитуд сигмоидальных фиктивных управлений m_1, m_2 в (32) остаются в силе, а в условии (42), (39) корректируется неравенство на выбор X_4 :

$$X_4 > X_{41} + \frac{1}{4b_{3,\min}} \cdot \frac{2, 2b_{2,\max} X_3^2 (X_2 - |x_2(0)|)}{(0, 4X_2 - (F_1 + G_1) / b_{1,\min})(X_2 - |x_2(0)|)},$$

$$X_{41} = \frac{1}{4b_{3,\min}} \left(4F_3 + \frac{4b_{2,\max} (|x_3(0)| + 0,5X_3)^2}{X_2 - |x_2(0)|} \right),$$

и в условиях (41) изменяется нижняя граница $\underline{\Delta}_2$:

$$\underline{\Delta}_2 = \frac{2, 2b_{2,\max} X_3^2 (X_2 - |x_2(0)|)}{(4b_{3,\min} X_4 - 4F_3)(X_2 - |x_2(0)|) - 4b_{2,\max} (|x_3(0)| + 0,5X_3)^2}.$$

3 Результаты моделирования

Для иллюстрации применения описанной процедуры синтеза системы слежения с учетом проектных ограничений на переменные состояния и управление, рассмотрим модель перевернутого математического маятника с учетом редуцированной динамики двигателя постоянного тока (ДПТ). Данная модель аналогична (1) и имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_{21} \sin x_1 - a_{22} x_2 + b_2 x_3 + \eta(t), \\ \dot{x}_3 &= -a_{32} x_2 - a_{33} x_3 + b_3 u, \end{aligned} \quad (45)$$

где a_{ij} , b_i – положительные конструктивные коэффициенты:

$$a_{21} = \frac{\bar{g}}{l}, \quad a_{22} = \frac{\kappa}{l}, \quad b_2 = \frac{k_a}{ml^2}, \quad a_{32} = \frac{c}{L}, \quad a_{33} = \frac{R}{L}, \quad b_3 = \frac{1}{L}, \quad (46)$$

которые не определены и могут изменяться в известных диапазонах. Описание переменных состояния $x = \text{col}(x_1, x_2, x_3)$ системы (45), которые подлежат прямым измерениям, и параметров (46) приведено в табл. 1.

Таблица 1. Описание переменных состояния и параметров объекта управления

Обозначение	Описание, единица измерения	Обозначение	Описание, единица измерения
x_1	угловое положение маятника, [рад]	l	длина маятника, [м]
x_2	угловая скорость маятника, [рад/с]	κ	коэффициент вязкого трения, [Н·с/м ²]
x_3	ток якоря ДПТ, [А]	c	коэффициент противо-ЭДС ДПТ, [В·с/рад]
$\eta(t)$	Неконтролируемое возмущение, [Н·м]	R	сопротивление якоря ДПТ, [Ом]
$\bar{g}=9,81$	ускорение свободного падения, [м/с ²]	L	индуктивность якоря ДПТ, [Гн]
m	масса маятника, [кг]	k_a	Коэффициент пропорциональности, [Н·м/А]

В системе (45) регулируемой (выходной) переменной является угловое положение маятника x_1 , для которого ставилась задача отслеживания заданного сигнала $g(t)$ (7) при наличии следующих проектных ограничений на переменные состояния и управление u , в качестве которого выступает напряжение питания якорной цепи ДПТ, [В] (43):

$$|x_1(t)| < X_1 = \pi, \quad |x_2(t)| \leq X_2 = 2,15, \quad |x_3(t)| \leq X_3 = 3,61; \quad |u(t)| \leq U = 90, \quad (47)$$

где начальные условия

$$x_1(0) = \pi/3, \quad x_2(0) = 0,64, \quad x_3(0) = 0,5 \quad (48)$$

были известны и удовлетворяли (6).

В табл. 2 приведены рассматриваемые диапазоны изменения внешних воздействий, параметров объекта, а также конкретные функции и значения, принятые при моделировании.

Таблица 2. Параметры объекта управления

	Диапазон изменения	Вид или значение		Диапазон изменения	Значение
$\eta(t)$	$ \eta(t) \leq 0,5$	$0,25t, t \in [(k-1)T, kT),$ $k = 1, 2, \dots, T = 2$	c	$[0, 27; 0, 33]$	0,26
$g(t)$	$ g(t) \leq 0,52$ $ \dot{g}(t) \leq 0,52$	$0,52 \sin t$	R	$[4, 15; 4, 2]$	4,15
m	$[0, 18; 0, 25]$	0,23	L	$[0, 012; 0, 013]$	0,013
l	$[0, 2; 0, 3]$	0,25	k_a	$[1, 68; 1, 75]$	1,68
κ	$[2; 4]$	3,5			

Для решения поставленной задачи (4)- (5) вводились сигмоидальные фиктивные управления (8), невязки (10) и истинное разрывное управление (43). Замкнутая система (12) имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -m_1 \sigma(k_1 e_1) - \dot{g} + b_1 e_2; \\ \dot{e}_2 &= -b_2 m_2 \sigma(k_2 e_2) - a_{22} e_2 + f_2 + \Lambda_1 + b_2 e_3; \\ \dot{e}_3 &= -b_3 m_3 \sigma(k_3 e_3) - a_{33} e_3 + f_3 + \Lambda_2, \end{aligned}$$

где $f_2 = a_{21} \sin x_1 + a_{22} m_1 + \eta(t)$, $f_3 = -a_{32} x_2 + a_{33} m_2$, $\Lambda_i = m_i \frac{k_i (1 - \sigma^2(k_i e_i))}{2} \dot{e}_i$, $i = 1, 2$.

Исходя из заданных проектных ограничений (47), (25), (26), (28) были определены границы:

$$\begin{aligned} |f_2| \leq F_2 &= a_{21, \max} + 0,5 a_{22, \max} X_2 + N = 71,05, \\ |f_3| \leq F_3 &= a_{32, \max} X_2 + 0,5 a_{33, \max} X_3 = 690,875, \end{aligned}$$

для расчета которых также использовались диапазоны изменения конструктивных коэффициентов (46), найденные по известным диапазонам изменения параметров (табл. 2):

$$\begin{aligned} a_{21} \in [32, 70; 49, 05], a_{22} \in [6, 67; 20], b_2 \in [74, 67; 243, 06]; \\ a_{32} \in [20, 76; 27, 5], a_{33} \in [319, 23; 350], b_3 \in [76, 92; 83, 34]. \end{aligned}$$

С учетом (47), (27) было зафиксировано отклонение Δ_{e_2} :

$$\Delta_{e_2}^* = X_2 - |x_2(0)| = 1,51,$$

и из (41) приняты значения

$$\Delta_1 = 0,1, \Delta_2 = 0,325, \Delta_3 = 0,05. \quad (49)$$

С учетом неравенств (32) были выбраны следующие параметры регулятора:

$$m_1 = 1,06, k_1 = 22; m_2 = 1,76, k_2 = 6,77; m_3 = 90.$$

В целях сравнительного анализа также был промоделирован закон управления с классическими линейными фиктивными управлениями:

$$e_2 = x_2 - x_2^* = x_2 + h_1 e_1, e_3 = x_3 - x_3^* = x_3 + h_2 e_2; u = -m_3 \text{sign} e_3, \quad (50)$$

где значения $h_1 = 10,78$, $h_2 = 4$ были выбраны из достаточных условий так, чтобы достичь ту же точность, что и для закона управления (10), (43), где были приняты сигмоидальные фиктивные управления (8).

На рис. 2-4 в нижней части представлены графики переменных состояния $x_i(t)$, $i = \overline{1, 3}$ (сплошные линии), задающего воздействия $g(t)$ и фиктивных управлений $x_i^*(t)$, $i = 2, 3$ (пунктирные линии). При этом в верхней части приведены графики ошибки слежения $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$ за задающим

воздействием и графики невязок $e_i(t) = x_i(t) - x_i^*(t)$, $i = 2, 3$ между переменными состояния и стабилизирующими фиктивными управлениями. Графики в левой части соответствуют закону управления с сигмоидальными фиктивными управлениями (10), (43), справа – с линейными фиктивными управлениями (50).

В табл. 3 для законов управления (10), (43) с сигмоидальными и (50) с линейными фиктивными управлениями отражены следующие показатели качества по результатам моделирования: время регулирования t_1 : $|e_1(t)| \leq 0,1$, $t \geq t_1$; величина перерегулирования по переменным состояния $x_{i,\max} \geq |x_i(t)|$, $t \geq 0$, $i = \overline{1,3}$; точность в установившемся режиме $\delta_1 \geq |e_1(t)|$, $t > t_1$.

Таблица 3. Значения показателей качества регулирования

Показатель	Закон управления (10), (43) (сигмоидальные фиктивные управления)	Закон управления (50) (линейные фиктивные управления)	Требования (не более)
t_1 , с	0,6461	0,1929	–
δ_1 , рад	0,0504	0,0504	0,1
$x_{1,\max}$, рад	1,0485	1,0478	3,14
$x_{2,\max}$, рад/с	1,0076	10,1090	2,15
$x_{3,\max}$, А	1,8002	17,9450	3,61

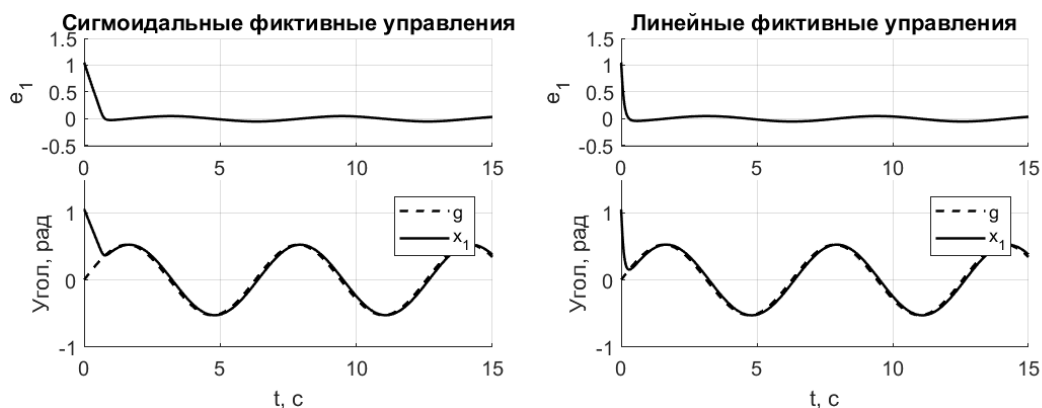


Рис. 2. Графики $x_1(t)$, $g(t)$, $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$

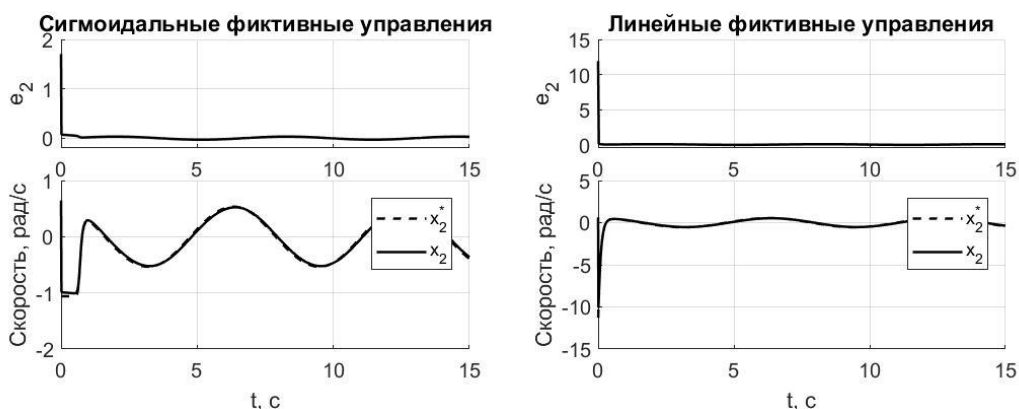


Рис. 3. Графики $x_2(t)$, $x_2^*(t)$, $e_2(t) = x_2(t) - x_2^*(t)$

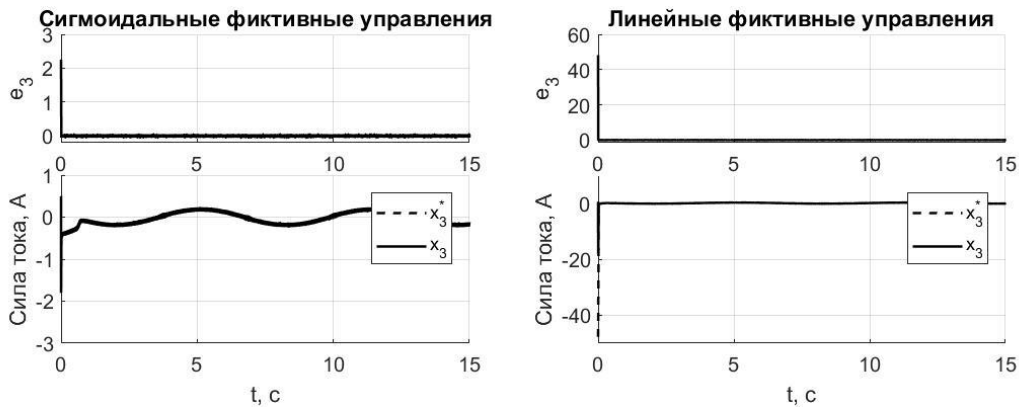


Рис. 4. Графики $x_3(t)$, $x_3^*(t)$, $e_3(t) = x_3(t) - x_3^*(t)$

Таким образом, из рис. 2-4 и табл. 3 следует, что для обоих законов управления (10), (43) и (50) достигнутая точность оказалась равна 0,0504 [рад] и не превысила требуемую 0,1 [рад]. Для закона с линейными фиктивными управлениями время регулирования оказалось в 3,35 раз меньше по сравнению с законом, где были приняты сигмоидальные фиктивные управления, при сходной величине перерегулирования $x_{1,max}$. Однако неограниченные линейные фиктивные управления привели к увеличению перерегулирования $x_{2,max}$, $x_{3,max}$ примерно в 10 раз (по сравнению с законом с сигмоидальными фиктивными управлениями) и как следствие – к невыполнению заданных проектных ограничений на переменные x_2 и x_3 (47). В результате, цель управления (4), (49), (47) достигается только для закона (10), (43), где приняты сигмоидальные фиктивные управления.

Заключение

Цель исследований состояла в синтезе системы слежения для нелинейного объекта управления в условиях действия параметрических и внешних возмущений и при наличии проектных ограничений на переменные состояния и управление. Цель была достигнута с помощью применения блочного принципа управления, в рамках которого были приняты ограниченные сигмоидальные фиктивные управления, обеспечивающие инвариантность по отношению к возмущениям.

Использование сигмоидальных фиктивных управлений позволило избежать больших всплесков в начале переходных процессов и получить без использования численных методов аналитические выражения для выбора параметров обратной связи, при которых обеспечивается выполнение проектных ограничений на переменные состояния и управления. Показано, что по сравнению с неограниченными линейными фиктивными управлениями, которые классически используются в блочном подходе, сигмоидальные фиктивные управления позволяют достичь перерегулирования меньшей величины (до 10 раз по результатам моделирования). На практике данный факт позволяет выбирать исполнительные устройства меньшей мощности при использовании сигмоидальных фиктивных управлений. Получена оценка предельной точности слежения, которую можно обеспечить при имеющихся ограничениях в рамках используемого метода.

Стоит отметить, что представленный подход допускал существенную параметрическую неопределенности модели объекта управления, поэтому условия на выбор параметров регулятора были получены исходя из известных предельных границ изменения параметров системы. Вследствие чего могут потребоваться значительные ресурсы управления и возможное расширение области проектных ограничений, которые гарантированно могут быть удовлетворены, либо снижение допустимой точности регулирования при имеющихся ресурсах.

Литература

1. Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // *АиТ*. 2007. № 3. С. 106–125.
2. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез линейных законов управления при фазовых ограничениях // *АиТ*. 2009. № 6. С. 48–57.
3. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 560 с, 2014
4. Краснощеченко В.И. Симплекс-метод решения задачи быстрогодействия при наличии ограничения на скалярное управление и фазовых ограничений // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2014. №6 (30).
5. Карамзин Д.Ю. Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями при ослабленных предположениях управляемости // *Вопросы теории безопасности и устойчивости систем*. 2018. № 20. С. 46-61.
6. Buskens C., Maurer H. SQR-methods for solving optimal control problems with state and control constraints: adjoint variables, sensitivity analysis and real time control // *J. of Comput.&Appl. Math*. 2000. Vol. 120. P. 85–108.
7. Rawlings J., Mayne D. Model Predictive Control: Theory and Design. Madison, WI: Nob Hill Pub., 2009.
8. Edwards C., Spurgeon S. Sliding mode control: theory and applications. Taylor&FrancisLtd, 237p., 1998.
9. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981. 368 с.
10. Ferrara A., Incremona G.P., Magni L. Model-based event-triggered robust MPC/ISM // *Proc. Eur. ControlConf., Strasbourg*. 2014. P. 2931–2936.
11. Incremona G.P., Rubagotti M., Ferrara A. Sliding Mode Control of Constrained Nonlinear Systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2016. P. 1-1.
12. Лукьянов А.Г. Блочный метод синтеза нелинейных систем на скользящих режимах // *АиТ*. 1998. № 7. С. 14–34.
13. Краснова С.А., Сиротина Т.Г., Уткин В.А. Структурный подход к робастному управлению // *Автоматика и телемеханика*. 2011. № 8. С. 65–95.
14. Краснова С.А., Уткин А.В. Анализ и синтез минимально-фазовых нелинейных SISO-систем при действии внешних несогласованных возмущений // *Проблемы управления*. 2014. №6. С. 22–30.
15. Kochetkov S.A., Krasnova S.A., Antipov A.S. Cascade Synthesis of Electromechanical Tracking Systems with Respect to Restrictions on State Variables // *IFAC-PapersOnLine*. 2017. Vol. 50. No. 1. P. 1042–1047.
16. Антипов А.С., Краснова С.А. Блочный синтез системы слежения для двухроторной электромеханической системы при ограничениях на переменные состояния // *Прикладная математика и механика*. 2021. Т. 85. № 1. С. 3–20.