ИНДИКАТИВНОЕ ВРЕМЕННО́Е ПЛАНИРОВАНИЕ В СТРАТЕГИЧЕСКИХ ЦЕЛЕВЫХ ПРОГРАММАХ РАЗВИТИЯ СЛОЖНЫХ КРУПНОМАСШТАБНЫХ СИСТЕМ

Топка В.В., Цвиркун А.Д.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65
topka3@mail.ru, tsvirkun@ipu.ru

Аннотация: Рассматривается модель временно́го планирования в стратегических целевых программах инновационного развития сложных крупномасштабных систем. Детерминированный инновационный проект на практике имеет конъюнктивную логику и описывается в пространстве переменных «время – стоимость – показатель надежности». Показатель надежности работы представлен функцией распределения Вейбулла. В этом случае получена оценка снизу показателя надежности проекта в целом. Временно́й индикатор целевой программы (крупномасштабного проекта) находится из решения оптимизационной задачи, для которой рекомендован эффективный метод. Приводятся результаты численных расчетов для тестового примера.

Ключевые слова: индикативное планирование, инновационный проект, методы оптимизации.

Введение

Пусть задан ациклический ориентированный граф *G(E,Г),* где E − множество вершин, соответствующих работам проекта (представление *Activity-on-Node*), а $\Gamma \subseteq E \times E$ – множество дуг, задающих отношения частичного порядка непосредственного технологического предшествования работ. Сеть *G(E, Г)* имеет одну конечную и несколько начальных вершин; *n* – конечная вершина, последний номер среди всех вершин, а также фиктивная вершина *n*+1, соответствующая завершению проекта. Путь на сети содержит некоторое подмножество из всех вершин, так что первая вершина пути не имеет предшествующих, а последняя – последующих. В модели для представления сетевых ограничений проекта будем использовать в качестве характеристической функции системы ограничений матрицу путей по вершинам сети (ациклического ориентированного графа) *G (E, Г)* $\mathrm{A} = (a_{ij})(j \in \mu_i)$. В сетевой модели проекта *G(E, Г)*, каждый путь μ_i=(*v, ...,j,k,...,n*) из начальных вершин *v*, таких, что $\Gamma_v^{-1} = \varnothing$, в конечную *n* однозначно представляется строкой специально построенной матрицы путей (по вершинам) $\mathrm{A} = (a_{ij})$, в которой ее элементы – единицы стоят в *i* –й строке на *j* – м месте только в том случае, когда *j* – я вершина принадлежит *i* – му пути. $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow j \in \mu_i$. Всем остальным случаям, когда $j \notin \mu_i$, соответствуют пустые клетки.

1 Определение оптимального временно́го индикатора (минимизации критического пути) в детерминированной сети проекта с конъюнктивной логикой в условиях модели Вейбулла

Для технологической сети проекта с дизъюнктивными входными дугами были рассмотрены функции надежности работ в виде ограниченной вогнутой функции [1] и в виде функции распределения Рэлея [2]. Конъюнктивную сеть G(E,Г) будем называть правильно занумерованной, если $j \underset{\Gamma}{\prec} k \Rightarrow j < k$. Тогда все такие вершины k в строках матрицы путей (по вершинам) будут находиться справа от столбца j. Рассмотрим строки, в которых на j-м месте стоит 1. Количество различных «хвостов» (подмножеств строки) от столбца j до n, которое нетрудно сосчитать, соответствует числу путей из j-й вершины в конечную n, т. е. параметру $d_j = 1, 2, \ldots \quad j = 1 : n$. Поэтому будем считать этот параметр d_j известным для данной правильно занумерованной сети G(E,Г). Тогда для показателя надежности P_{n+1} инновационного проекта в целом, соответствующего фиктивной вершине n+1, которая обозначает завершение детерминированного проекта получим, в случае конъюнктивных входящих дуг, оценку снизу:

$$P_{n+1} \geq \prod_{j=1}^{n} p_j^{d_j} \geq P \,, \qquad (1),$$

где вероятность P (заданное ограничение) принадлежит отрезку

$P \in [\varepsilon,\ 1\text{-}\varepsilon],\quad \varepsilon \downarrow 0,\ d_j = 1, 2, \ldots$ - некоторые известные величины.

В приведённых условиях, формальная постановка задачи о минимизации критического пути, (временно́й индикатор) с учётом оценки показателя надёжности проекта, а также его работ заданных функцией распределения Вейбулла [3] в конъюнктивной модели имеет вид:

$$\max_{1\le i\le m} \sum_{j\in\mu_i} a_{ij} t_j \to \inf_{(u,t)\in U},$$

$$P = \prod_{j=1}^{n} \left[1 - \exp\left(-b_j u_j^{\alpha_j}\right)\right]^{d_j} \geq P,$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j u_j \leq C,$$

$$s_j u_j = -r_j t_j + h_j, \quad j = 1:n.$$

Где U - допустимое множество, задаваемое ограничениями задачи.

$$f = t_0 \to \inf_{(u,t,t_0)\in U},$$

$$g_i(t,t_0) = \sum_{j\in\mu_i} a_{ij} t_j - t_0 \leq 0, \quad i = 1:m,$$

$$g_{m+1}(u) = \ln P - \sum_{j=1}^{n} d_j \ln\left[1 - \exp\left(-b_j u_j^{\alpha_j}\right)\right] \leq 0, \qquad (2)$$

$$g_{m+2}(u) = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j - C \leq 0,$$

$$g_j(u,t) = r_j t_j + s_j u_j - h_j = 0, \quad j = m+3:n+m+3.$$

$$U = \left\{ \begin{array}{l} u \in U_0 :\ g_i(t,t_0) \leq 0,\ i = 1:m,\ g_{m+1}(u) \leq 0,\ g_{m+2}(u) \leq 0, \\ g_j(u,t) = 0, \quad j = m+3:n+m+3. \end{array} \right\}$$

допустимое множество задачи $U \subset E^n$, определяемое системой ограничений (2) является ограниченным замкнутым выпуклым множеством из E^n. Где в U –допустимом множестве задачи, j –номер вершины, μ_i – пути по вершинам – технологические цепочки из вершин нижнего уровня в конечную вершину, i – номер пути, матрица $\mathrm{A} = (a_{ij})$ – характеристическая функция системы ограничений, соответствующих топологии технологической сети и имеющая большую размерность. Индикаторы: $P > 0$ –заданное ограничение на оценку показателя надежности проекта, $C > 0$ – заданная величина суммарных затрат по статьям работ j=1: n проекта.

2 Минимизация критического пути проекта в квадратичной модели

Сформируем следующую квадратичную модель целевой функции на текущей итерации x_k:

$$m_k(p) = f + \nabla f_k^T(p) + \frac{1}{2} p^T B_k p.$$

Используя обратный оператор $H_k = B_k^{-1}$, где B_k - матрица вторых производных (гессиан), имеем задачу: $\min_H \|H - H_k\|$,

при ограничениях $H = H^T$, $\quad Hy_k = s_k$.

Единственное решение H_{k+1} дается методом BFGS [4, с. 140]:

$H_{k+1} = (I - \rho_k s_k y_k^T) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k s_k s_k^T,$

Сделаем необходимые пояснения.

$\rho_k = \frac{1}{y_k^T s_k},$

где $y_k = \nabla f_{k+1} - \nabla f_k,$ $s_k = x_{k+1} - x_k = \alpha_k\, p_k,$ направление спуска $p_k = -H_k \nabla f_k$; s_k и y_k удовлетворяют условию кривизны $s_k^T y_k > 0$. Когда f, т.е. mk (p) сильно выпукла это условие выполняется для любых двух x_k и x_{k+1} Длина шага α_k удовлетворяет условию Вулфа [4, с. 34]: $f(x_k + \alpha_k p_k) \le f(x_k) + c_1 \alpha_k \nabla f_k^T p_k$, $\nabla f(x_k + \alpha_k p_k)^T p_k \ge c_2 \nabla f_k^T p_k$. 0<c1<c2<1. В качестве нормы используется взвешенная норма Фробениуса

$$\|A\|_W = \|W^{1/2} A W^{1/2}\|_F,$$

где $\|\cdot\|_F$ определяется как $\|C\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2$, взвешенная матрица W может быть выбрана как любая матрица, удовлетворяющая связи $W y_k = s_k$. Пересчёт обратного гессиана выполняется по формуле:

$$H_{k+1} = H_k - \frac{H_k y_k y_k^T H_k}{y_k^T H_k y_k} + \frac{s_k s_k^T}{y_k^T s_k}.$$

Это фундаментальная идея квазиньютоновского обновления: вместо того, чтобы пересчитывать приближенные гессианы (или обратные гессианы) с нуля на каждой итерации, применяется простая модификация, которая объединяет самую последнюю наблюдаемую информацию о целевой функции с существующими знаниями, заложенными в наше текущее приближение гессиана.

Каждая итерация может быть выполнена за O(n2) арифметических операций (плюс стоимость оценки функции и градиента); но не O(n3) операций, таких как решение линейных систем или матрично–матричные операции. Алгоритм является робастным, а его скорость сходимости сверхлинейная, что достаточно быстро для большинства практических целей. Несмотря на то, что метод Ньютона сходится быстрее (то есть квадратично), его стоимость за итерацию обычно выше из-за необходимости использования вторых производных и решения линейной системы.

Отметим одно важное обстоятельство. При использовании неградиентных методов спуска квазиньютоновского вида обычно рекомендуют делать градиентные шаги, полагая $H_k = E^n$ на некоторых итерациях при $k \to \infty$. Оказывается, что такие «встроенные» градиентные шаги обеспечивают глобальную сходимость (в некотором смысле) неградиентного в целом метода [5].

Заключение

Индикативные планы направлены на уменьшение неопределённости в рыночной и смешанной экономике и носят рекомендательный характер. При этом они фиксируют лишь общие результаты деятельности государства, отраслей или других субъектов экономики. Индикативное планирование предполагает использование системы экономических индикаторов [6]. В настоящее время метод индикативного планирования используется редко, что связано с усилением позиций частного бизнеса и повышением устойчивости рыночных механизмов. Однако применяются другие формы индикативного планирования: стратегические целевые программы и прогнозы развития отдельных стратегических отраслей. В стратегических целевых программах или крупномасштабных проектах индикаторами выступают его продолжительность выполнения, а также суммарные затраты и оценка показателя надежности программы или проекта в целом. (См. в Таблицу с результатами тестовых расчетов).

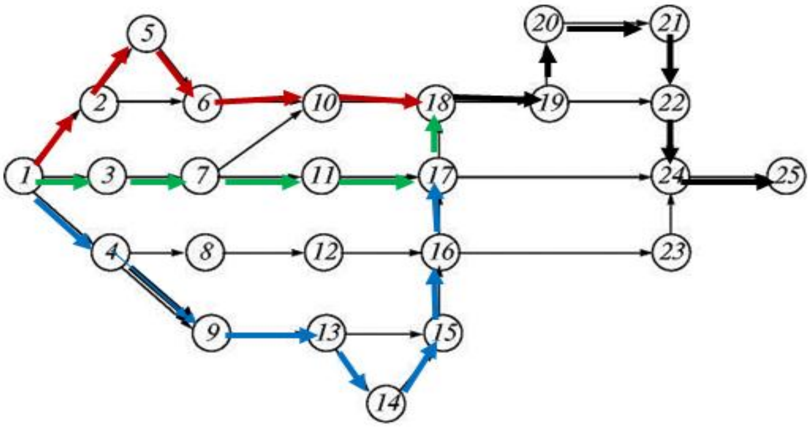

Рис. Укрупненная технологическая сеть инновационного проекта.

Критические пути по вершинам:

μ_1^* = 1, 2, 5, 6, 10, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25; μ_7^* =1, 3, 7, 11, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25;

μ_{14}^* =1, 4, 9, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25.

Индикаторы проекта: показатель надежности P=0.97;

стоимость C=3150 – ограничения. Целевая функция T*= 208.7712 – продолжительность проекта

– временнóй индикатор.

Таблица (продолжение с 10 вершины). Расчет временнóго индикатора проекта T^*.

	j =10	j =11	j =12	j =13	j =14	j =15	j =16	j =17	j =18		j=25	$T^* = -t_{25}$	резерв Δt_{25}
i=1	1 1,298	0	0	0		0	0	0	1 4,224		3 2,875	-208.7712	0.0000
i=2	1 1,298	0	0	0	0	0	0	0	1 4,224	.	3 2,875	-208.7712	-7.2159
i=3	1 1,298	0	0	0	0	0	0	0	1 4,224		3 2,875	-208.7712	- 44.3264
i=4	1 1,298	0	0	0	0	0	0	0	1 4,224		3 2,875	-208.7712	- 51.5423
i=5	1 1,298	0	0	0	0	0	0	0	1 4,224		3 2,875	-208.7712	- 54.6910
i=6	1 1,298	0	0	0	0	0	0	0	1 4,224		3 2,875	-208.7712	- 61.9069
i=7	0	3 7,616	0	0	0	0	0	2 8,372	1 4,224		3 2,875	-208.7712	0.0000
i=8	0	3 7,616	0	0	0	0	0	2 8,372	1 4,224		3 2,875	-208.7712	-7.2159
i=9	0	3 7,616	0	0	0	0	0	2 8,372	0		3 2,875	-208.7712	- 28.4654
i=10	0	0	3 2,221	0	0	0	1 3,694	2 8,372	1 4,224		3 2,875	-208.7712	- 11.1830
i=11	0	0	3 2,221	0	0	0	1 3,694	2 8,372	1 4,224		3 2,875	-208.7712	- 18.3990
i=12	0	0	3 2,221	0	0	0	1 3,694	0	0		3 2,875	-208.7712	- 23.1904
i=13	0	0	3 2,221	0	0	0	1 3,694	2 8,372	0		3 2,875	-208.7712	- 39.6484
i=14	0	0	0	1 7,688	1 0,121	1 9,270	1 3,694	2 8,372	1 4,224		3 2,875	-208.7712	0.0000
i=16	0	0	0	1 7,688	1 0,121	1 9,270	1 3,694	2 8,372	0		3 2,875	-208.7712	- 28.4654
i=17	0	0	0	1 7,688	1 0,121	1 9,270	1 3,694	0	0		3 2,875	-208.7712	- 12.0073
i=18	0	0	0	1 7,688	0	1 9,270	1 3,694	2 8,372	1 4,224		3 2,875	-208.7712	- 10.1216
i=19	0	0	0	1 7,688	0	1 9,270	1 3,694	2 8,372	1 4,224		3 2,875	-208.7712	- 17.3375
i=20	0	0	0	1 7,688	0	1 9,270	1 3,694	2 8,372	0		3 2,875	-208.7712	- 38.5870
i=21	0	0	0	1 7,688	0	1 9,270	1 3,694	0	0		3 2,875	-208.7712	- 22.1289

Литература

1. *Tsvirkun A.D., Topka V.V.* A Planning and Scheduling Method for Large-Scale Innovation Projects // Advances in Systems Science and Applications. 2019. Vol.19, No 4. pp. 66-78.
2. *Topka V.V., Tsvirkun A.D.* Criteria for planning by large-scale innovation projects. / Proceedings of the 12th International Conference "Management of Large-Scale System Development" (MLSD). M.: IEEE, 2019. https://ieeexplore.ieee.org/document/8911028.
3. *Topka V.V.* Lexicographic Solution of Two Objective Project Planning Problem under Constrained Reliability Index // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2014. V. 53. N. 6. pp. 877–895.
4. *Nocedal J., Wright S. J.* Numerical Optimization. Second Edition. N.Y.: Springer, 2006. p.664.
5. *Bertsekas D.P.* Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods. N.Y.: Academic Press, 1982.
6. Индикативное планирование / А. А. Ткаченко // Большая российская энциклопедия : [в 35 т.] / гл. ред. Ю. С. Осипов. — М. : Большая российская энциклопедия, 2004—2017.