ОПТИМУМ ПО ПАРЕТО В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Мохонько Е.З.

Вычислительный Центр им. А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН,
Россия, г. Москва ул. Вавилова д.40

ezmokhon@mail.ru

Аннотация: Достаточные условия существования оптимальных по Парето стратегий формулируются с использованием понятия стабильного моста. Это позволило найти дискретный режим получения информации о порожденных оптимальными стратегиями траекториях.

Ключевые слова: многокритериальность, режим получения информации, стабильный мост

Введение

Важный для наших дней вопрос как определить дискретный режим получения информации, чтобы получить тот же результат, что и при непрерывном получении информации, был рассмотрен в [1-3]. В [3] рассматривалась многокритериальная дифференциальная задача при неопределенности. Исследовались оптимумы по Слейтеру. В данной работе исследуются оптимумы по Парето. Выяснены достаточные условия существования оптимумов по Парето при использовании позиционных стратегий и существования максимума по Парето с использованием r - стратегий. Эти стратегии позволяют получать информацию о ходе динамического конфликта как дискретным, так и непрерывным образом. Некоторый дискретный режим получения информации о ходе конфликта оказывается достаточным для существования той же оптимальной траектории, что и при непрерывном наблюдении при использовании позиционных стратегий. При определении достаточных условий используется понятие стабильного моста. В [4] при поиске оптимумов в многокритериальной дифференциальной задаче с неопределенностью мосты не используются.

Дано также определение гарантированного результата при применении позиционных стратегий. Как и в одношаговой модели конфликта из [5], в рассматриваемой динамической модели дается такое определение гарантированного результата, при котором лицу, принимающему решение, позволено применять максимальные по Парето позиционные стратегии, в то время, как помеха использует минимальные по Слейтеру позиционные стратегии. Эта возможность продемонстрирована на примере.

Новизна данной работы состоит в том, что в ней хотя и изучается примерно тот же круг вопросов, что и в [3], но в [3] изучаются оптимумы по Слейтеру, а в данной работе исследуются оптимумы по Парето.

Основная цель данной работы состоит в построении дискретного режима получения информации, который настолько же эффективен, как и непрерывное получение информации в многокритериальной дифференциальной задаче принятия решений, в которой в качестве решения используются оптимумы по Парето.

1 Оптимумы по Парето с использованием позиционных стратегий

Рассмотрим многокритериальную задачу принятия решений при неопределенности

$$<\bar{U},\bar{V},(I^1(u,v)=g^1(x(T)),\dots,I^N(u,v)=g^N(x(T))>,$$

$$\dot{x}=f(x,t,u,v), t_0\le t\le T, \qquad (1)$$

$$x(t_0)=x^0, \qquad (2)$$

$$u\in P, v\in Q,$$

$$I^1(u,v)=g^1(x(T)),$$

$$I^N(u,v)=g^N(x(T)).$$

Здесь x - n - мерный вектор состояния, u и v - p - и q - мерные вектор – функции. u - управление, значения которого выбираются лицом, принимающим решения (ЛПР), с целью сделать как можно

меньше N своих функций целей $I^1(u,v)=g^1(x(T)),\ldots,I^N(u,v)=g^N(x(T))$, при том, что неопределенность (помеха) v может быть любой, $v\in Q$. $g^1(x(T))$, …, $g^N(x(T))$ непрерывны.

N - количество компонент в вектор - функции цели.

Множества P и Q - компактны в соответствующих векторных пространствах. Вектор-функция $f(x,t,u,v)$ непрерывна по всем своим аргументам и удовлетворяет ограничениям из [6]. Выполняется условие существования седловой точки в маленькой игре [6].

Множеством допустимых стратегий ЛПР и помехи $\bar{U},\bar{V}$ является множество измеримых по всем своим аргументам позиционных $u(x,t), v(x,t)$ и программных $u(t), v(t)$ управлений, удовлетворяющих включению $u\in P$, $v\in Q$, а также $r-$стратегии $\bar{u},\bar{v}$ [1]. Используется формализм ломаных Эйлера [6] и модифицированных А.Ф.Кононенко движений [7].

$X[t_*,x_*,u(x,t),v(x,t)]$ - множество движений, исходящих из x_*,t_*,если ЛПР применяет стратегию $u(x,t)$, а стратегия неопределенности описывается $v(x,t)$. $X[t_*,x_*,u(x,t)]$ - множество движений, исходящих из x_*,t_*,если ЛПР применяет стратегию $u(x,t)$. И мы не интересуемся, из каких соображений выбирает свое управление помеха. $X[t_*,x_*,u(x,t)]\supset X[t_*,x_*,u(x,t),v(x,t)] \quad \forall v(x,t)$. Аналогично определяются пучки движений $X[t_*,x_*,\bar{u}]$, $X[t_*,x_*,\bar{u},\bar{v}]$ при применении игроками r- стратегий $\bar{u}$ и $\bar{v}$. Из [8], стр. 146, известно, что $X[t_*,x_*,u(x,t)]\supset X[t_*,x_*,u(x,t),\bar{v}] \quad \forall\bar{v}$.

Пусть $u^*\in\bar{U}$ - некоторая фиксированная стратегия из множества допустимых стратегий ЛПР. Пусть $v^*\in\bar{V}$ - некоторая фиксированная стратегия из множества допустимых стратегий помехи (неопределенности).

Следуя [5] многокритериальной задаче при неопределенности

$$<\bar{U},\bar{V},(I^1(u,v)=g^1(x(T)),\ldots,I^N(u,v)=g^N(x(T))> \qquad (3)$$

поставим в соответствии две многокритериальные задачи

$$<\bar{V},(I^1(u^*,v)=g^1(x(T)),\ldots,I^N(u^*,v)=g^N(x(T))> \qquad (4)$$

и

$$<\bar{U},(I^1(u,v^*)=g^1(x(T)),\ldots,I^N(u,v^*)=g^N(x(T))> \qquad (5)$$

Для этих задач, опираясь на[3],[5],[7], определим понятия векторного максимума и векторного минимума.

Максимум по Парето. Неопределенность $v^P\in\bar{V}$ называется *максимальной по Парето* для задачи (4), если выполнены два требования. Они такие.

1. Пара (u^*,v^P) порождает решение $x^0(t), t\in[t_0,T]$ задачи(1),(2), которое является и единственным движением.
2. Несовместна система неравенств

$$\begin{cases} I^1(u^*,v^P)\le \max\limits_{X[t,x^0(t),u^*]} g^1(x(T)) \\ \quad\ldots \\ I^N(u^*,v^P)\le \max\limits_{X[t,x^0(t),u^*]} g^N(x(T)) \end{cases},$$

из которых по крайней мере одно неравенство строгое.

Пусть $k \in \{1,...,N\}$, $D^k = \left\{x,T \mid g^k(x(T)) \le g^k(x^0(T))\right\}$.

Обозначим $D = \bigcap_{k=1,...N} D^k$.

G_u - максимальный u - стабильный мост [6] к множеству D, ∂G_u - его граница. $u^{ext}(x,t)$ - экстремальная [6] стратегия к этому мосту.

Пусть $x^0(t), t \in [t_0, T]$ порождено кусочно-постоянными управлениями $u^0(t), v^0(t)$, $x^0(t) \in (G_u \setminus \partial G_u), t \in [t_0, T]$.

$$u^0(x,t) = \begin{cases} u^0(t), (x,t) \in G_u \\ u^{ext}(x,t), (x,t) \notin G_u \end{cases}.$$

Тогда неопределенность $v^0(t)$ является максимальной по Парето в задаче (4), где $u^* = u^0(x,t)$, то есть в задаче

$$< \bar{V}, (I^1(u^0(x,t), v) = g^1(x(T)), ..., I^N(u^0(x,t), v) = g^N(x(T)) >.$$

Требование $x^0(t) \in (G_u \setminus \partial G_u), t \in [t_0, T]$ является достаточным условием максимальности по Парето неопределенности $v^0(t)$.

Это следует из свойств u - стабильного моста G_u [1],[5] и экстремальной стратегии $u^{ext}(x,t)$.

Действительно, как бы ни вела себя помеха, $\forall t \in [t_0, T]$ любое движение из пучка движений $X\left[t, x^0(t), u^0(x,t)\right]$ в момент T будет находиться во множестве D. Значит, несовместна система неравенств

$$\begin{cases} I^1\left(u^0(x,t), v^0(t)\right) \le \max\limits_{X[t, x^0(t), u^0(x,t)]} g^1(x(T)) \\ \quad ... \\ I^N\left(u^0(x,t), v^0(t)\right) \le \max\limits_{X[t, x^0(t), u^0(x,t)]} g^N(x(T)) \end{cases},$$

из которых одно неравенство строгое.

Здесь

$$I^k\left(u^0(x,t), v^0(t)\right) = g^k\left(x^0(T)\right).$$

Т.е. неопределенность $v^0(t)$ является максимальной по Парето в задаче (4).

Пример 1.

$\dot{x}_1 = v$, $x_1(0) = 0$, $0 \le t \le 1$,

$\dot{x}_2 = u$, $x_2(0) = 0$, $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1$,

$$I^1(u,v) = g^1(x_1(1), x_2(1)) = x_1(1) - \frac{1}{2} x_2(1),$$

$$I^2(u,v) = g^2(x_1(1), x_2(1)) = x_2(1) - \frac{1}{2} x_1(1).$$

ЛПР и помеха могут применять допустимые программные и позиционные выборы.

Обозначим $\bar{A} = \{x_1, x_2, t \mid (0 \le t \le 1) \wedge (0 \le x_1 \le 1) \wedge (0 \le x_2 \le 1)\}$.

$x = (x_1, x_2)$, $u^0(t) = 1$, $v^0(t) = 1$.

$x_1^0(t) = t, t \in [0,1]$, $x_2^0(t) = t, t \in [0,1]$, $x_1^0(1) = 1$, $x_2^0(1) = 1$, $g^1\left(\bar{x}^0(1)\right) = \frac{1}{2}$, $g^2\left(\bar{x}^0(1)\right) = \frac{1}{2}$.

$$D^1=\left\{x_1,x_2,1 \mid g^1(x(1))\le g^1(x^0(1))\right\}=\left\{x_1,x_2,1 \mid x_1(1)-\frac{1}{2}(x_2(1))\le\frac{1}{2}\right\}$$

$$\min_u \max_{X\left[t,x_1(t),x_2(t),u(x,t)\right]} g^1\left(x_1(1),x_2(1)\right)=x_1(t)+1(1-t)-\frac{1}{2}(x_2(t)+1(1-t))=$$

$$=x_1(t)-\frac{1}{2}(x_2(t))+\frac{1}{2}(1-t).$$

$$G_u^1=\left\{(x_1,x_2,t)\in\bar{A} \mid \min_u \max_{X\left[t,x_1(t),x_2(t),u(x,t)\right]} g^1\left(x_1(1),x_2(1)\right)\le g^1(x^0(1))\right\}=$$

$=\left\{(x_1,x_2,t)\in\bar{A} \mid x_1(t)-\frac{1}{2}(x_2(t))+\frac{1}{2}(1-t)\le\frac{1}{2}\right\}$, то есть

$$G_u^1=\left\{(x_1,x_2,t)\in\bar{A} \mid x_1(t)-\frac{1}{2}(x_2(t))\le\frac{1}{2}t\right\}.$$

$$D^2=\left\{x_1,x_2,1 \mid g^2(x(1))\le g^2(x^0(1))\right\}=\left\{x_1,x_2,1 \mid x_2(1)-\frac{1}{2}(x_1(1))\le\frac{1}{2}\right\}$$

$$\min_u \max_{X\left[t,x_1(t),x_2(t),u(x,t)\right]} g^2\left(x_1(1),x_2(1)\right)=x_2(t)+0(1-t)-\frac{1}{2}(x_1(t)+0(1-t))=$$

$$=x_2(t)-\frac{1}{2}(x_1(t)).$$

$$G_u^2=\left\{(x_1,x_2,t)\in\bar{A} \mid \min_u \max_{X\left[t,x_1(t),x_2(t),u(x,t)\right]} g^2\left(x^1(1),x^2(1)\right)\le g^2(x^0(1))\right\}=$$

$$=\left\{(x_1,x_2,t)\in\bar{A} \mid x_2(t)-\frac{1}{2}(x_1(t))\le\frac{1}{2}\right\}.$$

$$D=\left\{(x_1,x_2,t=1)\in A \Big| \left(x_1(1)-\frac{1}{2}(x_2(1))\le\frac{1}{2}\right)\wedge\left(x_2(1)-\frac{1}{2}(x_1(1))\le\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

$$G_u=\left\{(x_1,x_2,t)\in A \Big| \left(x_1(t)-\frac{1}{2}(x_2(t))\le\frac{1}{2}t\right)\wedge\left(x_2(t)-\frac{1}{2}(x_1(t))\le\frac{1}{2}\right)\right\},$$

$$u^{ext}(x,t)=\begin{cases} 1, x_1(t)-\frac{1}{2}(x_2(t))>\frac{1}{2}t \\ 0,(x_1(t)-\frac{1}{2}(x_2(t))<\frac{1}{2}t)\wedge(x_2(t)-\frac{1}{2}(x_1(t))>\frac{1}{2}) \end{cases},$$

$$u^*(x,t)=\begin{cases} 1,(x,t)\in G_u \\ u^{ext}(x,t),(x,t)\notin G_u \end{cases}.$$

$v^0(t)=v^P(t)=1, t\in[0,1]$.

Пара $u^*(x,t)$, $v^P(t)$ порождает траекторию $x_1^0(t)=t, t\in[0,1]$, $x_2^0(t)=t, t\in[0,1]$.

$x^0(t)\in\partial G_u, t\in[0,1]$.

$v^P(t)$ является максимальной по Парето в задаче (4)

$<\bar{V},(I^1(u^*(x,t),v)=g^1\left(x(T)\right), I^2(u^*(x,t),v)=g^2\left(x(T)\right)>$.

Этот пример показывает, что требование $x^0(t)\in(G_u\setminus\partial G_u), t\in\left[t_0,T\right]$ является достаточным, но не необходимым для того, чтобы $v^0(t)$ было максимальным по Парето.

В данном случае особенности функций цели в примере таковы, что $v^0(t)$ является оптимальным по Парето, требование единственности выполняется. В некоторой окрестности $x^0(t)=t$ управление равно 1, так что предел ломаных Эйлера единственный, а именно $x^0(t)=t$.

Минимум по Парето. Альтернатива $u^P \in \bar{U}$ называется *минимальной по Парето* для задачи (5), если выполнены два требования. Они такие.

1.Пара (u^P, v^*) порождает решение $x^0(t), t\in[t_0,T]$ задачи (1),(2), которое является и единственным движением.

1. Несовместна система неравенств

$$\begin{cases} \min\limits_{X[t,x^0(t),v^*]} g^1(x(T)) \le I^1(u^P,v^*) \\ \qquad\qquad \dots \\ \min\limits_{X[t,x^0(t),v^*]} g^N(x(T)) \le I^N(u^P,v^*) \end{cases},$$

из которых по крайней мере одно неравенство строгое.

Пусть $k\in\{1,\dots,N\}$, $D^{k'} = \left\{x,T \mid g^k(x(T)) \ge g^k(x^0(T))\right\}$.

Обозначим $D' = \bigcap\limits_{k=1,\dots N} D^{k'}$.

G_v - максимальный v - стабильный мост к множеству D', ∂G_v - его граница. $v^{ext}(x,t)$- экстремальная стратегия к этому мосту.

Пусть $x^0(t), t\in[t_0,T]$ порождено кусочно-постоянными управлениями $u^0(t), v^0(t)$, $x^0(t)\in(G_v \setminus \partial G_v), t\in[t_0,T]$.

$$v^0(x,t) = \begin{cases} v^0(t), (x,t)\in G_v \\ v^{ext}(x,t), (x,t)\notin G_v \end{cases}.$$

Тогда альтернатива $u^0(t)$ является минимальной по Парето в задаче (5)

$<\bar{U}, (I^1(u,v^*) = g^1(x(T)),\dots, I^N(u,v^*) = g^N(x(T))>$, где $v^* = v^0(x,t)$,

то есть в задаче

$<\bar{U}, (I^1(u,v^0(x,t)) = g^1(x(T)),\dots, I^N(u,v^0(x,t)) = g^N(x(T))>$.

Требование $x^0(t)\in(G_v \setminus \partial G_v), t\in[t_0,T]$ является достаточным условием максимальности по Парето выбора ЛПР $u^0(t)$.

Это следует из свойств v - стабильного моста G_v и экстремальной стратегии $v^{ext}(x,t)$.

Действительно, какой бы выбор ни делал ЛПР, любое движение из пучка движений $X\left[t, x^0(t), v^0(x,t)\right]$в момент T будет находиться во множестве D'. Значит, при любом поведении ЛПР несовместна система неравенств

$$\begin{cases} I^1(u^0(t), v^0(x,t)) \ge \min\limits_{X[t,x^0(t),v^0(x,t)]} g^1(x(T)) \\ \qquad\qquad \dots \\ I^N(u^0(t), v^0(x,t)) \ge \min\limits_{X[t,x^0(t),v^0(x,t)]} g^N(x(T)) \end{cases},$$

из которых по крайней мере одно неравенство строгое.

Здесь $I^l\left(u^0(t),v^0(x,t)\right)=g^l\left(x^0(T)\right)$.

Т.е. альтернатива $u^0(t)$ является минимальной по Парето в задаче (5).

Следуя [5] дадим такие определения.

Определение 1. Неопределенность $v^L\in\bar{V}$ назовем L- максимальной в задаче (4), если v^L будет для задачи (4) при

$L=S$ максимальной по Слейтеру,

$L=P$ максимальной по Парето.

Определение 2. Неопределенность $u^K\in\bar{U}$ назовем K - минимальной в задаче (5), если u^K будет для задачи (5) при

$K=S$ минимальной по Слейтеру,

$K=P$ минимальной по Парето.

Определение 3. Пару $[u^K,\left(I^{1,L},I^{2,L}\right)]$ назовем KL - гарантированным решением задачи (3) в позиционных стратегиях, если выполнены следующие требования 1,2,3.

1. Пара (u^K,v^L) порождает решение $x^0(t),t\in\left[t_0,T\right]$ задачи (1),(2), которое является и единственным движением, то есть $\forall t\in\left[t_0,T\right]$ пучок движений состоит из единственного движения $X\left[t,x^0(t),u^K,v^L\right]=\left\{x^0(\tau),t\le\tau\le T\right\}$.

2.Существует неопределенность $v^L\in\bar{V}$, для которой $I^{1,L}=I^1\left(u^K,v^L\right)$, $I^{2,L}=I^2\left(u^K,v^L\right)$ и

альтернатива u^K является K - минимальной в задаче

$<\bar{U},(I^1(u,v^L)=g^1\left(x(T)\right),...,I^N(u,v^L)=g^N\left(x(T)\right)>$

(которую получили из (5) при неопределенности $v{=}v^L$)

3.Неопределенность v^L является L- максимальной в задаче

$<\bar{V},(I^1(u^K,v)=g^1\left(x(T)\right),...,I^N(u^K,v)=g^N\left(x(T)\right)>$

(которую получили из (4) фиксируя альтернативу $u{=}u^K$).

Минимум по Слейтеру, максимум по Слейтеру, SS- гарантированное решение для дифференциальной задачи при неопределенности определены в [3].

Напомним о минимуме по Слейтеру.

Минимум по Слейтеру. Альтернатива $u^s\in\bar{U}$ называется *минимальной по Слейтеру* для задачи (5), если выполнены два требования. Они такие.

1.Пара (u^S,v^*) порождает решение $x^0(t),t\in\left[t_0,T\right]$ задачи (1),(2), которое является и единственным движением.

2.Несовместна система неравенств

$$\begin{cases}\min\limits_{X[t,x^0(t),v^*]} g^1\left(x(T)\right)<I^1\left(u^S,v^*\right)\\ \qquad\qquad ...\\ \min\limits_{X[t,x^0(t),v^*]} g^N\left(x(T)\right)<I^N\left(u^S,v^*\right)\end{cases}.$$

Минимум по Слейтеру строится следующим образом.

Пусть $\exists l,l\in\{1,...,N\}$ G_v^l - максимальный v - стабильный мост [5], к множеству

$\left\{x,T \mid g^{l}(x(T)) \geq g^{l}(x^{0}(T))\right\}, \partial G_{v}^{l}$ - его граница. $v^{ext}(x,t)$ - экстремальная [5] стратегия к этому мосту.

Пусть $x^{0}(t), t \in [t_{0},T]$ порождено кусочно-постоянными управлениями $u^{0}(t), v^{0}(t)$, $x^{0}(t) \in (G_{v}^{l} \setminus \partial G_{v}^{l}), t \in [t_{0},T]$.

$$v^{0}(x,t)=\begin{cases} v^{0}(t),(x,t)\in G_{v}^{l} \\ v^{ext}(x,t),(x,t)\notin G_{v}^{l} \end{cases}.$$

Тогда альтернатива $u^{0}(t)$ является минимальной по Слейтеру в задаче (5)

$< \bar{U},(I^{1}(u,v^{*})=g^{1}(x(T)),...,I^{N}(u,v^{*})=g^{N}(x(T)) >$, где $v^{*}=v^{0}(x,t)$, то есть в задаче

$< \bar{U},(I^{1}(u,v^{0}(x,t))=g^{1}(x(T)),...,I^{N}(u,v^{0}(x,t))=g^{N}(x(T)) >$.

Это следует из свойств v - стабильного моста G_{v}^{l} и экстремальной стратегии $v^{ext}(x,t)$.

Пример 2.

Этот пример является продолжением примера 1. Построим SP - гарантированное решение.

$$\max_{v}\min_{X[t,x_{1}(t),x_{2}(t),v(x,t)]} g^{1}(x_{1}(1),x_{2}(1)) = x_{1}(t)+1(1-t)-\frac{1}{2}(x_{2}(t)+1(1-t)) =$$

$$x_{1}(t)-\frac{1}{2}(x_{2}(t))+\frac{1}{2}(1-t),$$

$$\left\{x,1 \mid g^{l}(x(1)) \geq g^{l}(x^{0}(1))\right\} = \left\{x,1 \mid g^{1}(x(1)) \geq g^{1}(x^{0}(1))\right\} = \left\{x,1 \mid x_{1}-\frac{1}{2}x_{2} \geq \frac{1}{2}\right\},$$

$$G_{v}^{1}=\left\{(x_{1},x_{2},t)\in \bar{A} \mid x_{1}(t)-\frac{1}{2}(x_{2}(t)) \geq \frac{1}{2}t\right\},\; x^{0}(t)\in \partial G_{v}, t\in[0,1],$$

$v^{ext}(x,t)$ к мосту G_{v}^{1} строится так. $v^{ext}(x,t)=1,(x,t)\notin G_{v}^{1}$.

$$v^{0}(x,t)=\begin{cases} 1,(x,t)\in G_{v}^{1} \\ v^{ext}(x,t),(x,t)\notin G_{v}^{1} \end{cases}.$$

Тогда альтернатива $u^{0}(t)=1 \forall t\in[0,1]$ является минимальной по Слейтеру в задаче (5)

$< \bar{U},(I^{1}(u,v^{*})=g^{1}(x(T)),...,I^{N}(u,v^{*})=g^{N}(x(T)) >$, где $v^{*}=v^{0}(x,t)$,

то есть в задаче $< \bar{U},(I^{1}(u,v^{0}(x,t))=g^{1}(x(T)), I^{2}(u,v^{0}(x,t))=g^{2}(x(T)) >$.

При стратегии $v^{0}(x,t)$ стратегия $u^{*}(x,t)=\begin{cases} 1,(x,t)\in G_{u} \\ u^{ext}(x,t),(x,t)\notin G_{u} \end{cases}$ реализуется как $u^{0}(t), t\in[0,1]$.

То есть является минимальной по Слейтеру. При $u^{*}(x,t)$ стратегия $v^{0}(x,t)$ реализуется как $v^{0}(t), t\in[0,1]$, то есть является максимальной по Парето.

Из этого и предыдущего примера следует, что пара $\left[u^{*}(x,t),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right]$ является SP гарантированным решением в задаче (3)

$< \bar{U},\bar{V},(I^{1}(u,v)=g^{1}(x(1)), I^{2}(u,v)=g^{2}(x(1)) >$.

2 Оптимумы по Парето с использованием r - стратегий

Напомним определение $r-$ стратегий [1].

Определение: $r-$стратегией $\bar{u}$ игрока 1 называется пара $\bar{u}=(r,u(.))$, ставящая в соответствие каждой точке (x,t)

1) неотрицательное число $r\ge 0$,

2) если $r>0$, то измеримую функцию $u(\theta)$, $u(.)=\{u(\theta)=u(x,t;\theta)\in P\mid t\le\theta<t+r(x,t)\}$,

если $r=0$, то управление в точке (x,t): $u(.)=u(x,t)$.

Аналогично определяется $r-$стратегия $\bar{v}$ помехи.

В [1],[8] определено понятие ломаной Эйлера $x_\Delta(t)=x_\Delta(t;x_*,t_*,\bar{u},v(.))$, и движения $x(t)=x(t;x_*,t_*,\bar{u})$, порожденных r - стратегией $\bar{u}$ из позиции (x_*,t_*).

В [1], [8] определено, какие моменты называется моментами получения информации для ломаных Эйлера и движений, порожденных r - стратегиями.

Обозначим

$X\left[t,x,u^0(\tau)\right]$-множество движений, исходящих из точки x,t и порожденных кусочно-постоянной стратегией $u^0(\tau)$, $\tau\in[t,T]$.

$$\bar{T}^2_u(x,t)=\{\bar{t}\mid\bar{t}\in[t,T],\exists x\left(\tau;x,t,u^0(\tau)\right)\in X\left[t,x,u^0(\tau)\right],$$

$$\exists t_2:x\left(\tau;x,t,u^0(\tau)\right)\notin G_u\forall\tau\in(\bar{t},t_2),t_2\in(\bar{t},T]\}$$

Если $\bar{T}^2_u(x,t)$ существует, то $\omega^2_{u0}(x,t)=\inf\limits_{\bar{t}\in\bar{T}^2_u(x,t)}\bar{t}$ при $(x,t)\in G_u$.

Если $\bar{T}^2_u(x,t)$ не существует, тогда $\omega^2_{u0}(x,t)=T$.

$\omega^2_{u0}(x,t)=t$ при $(x,t)\notin G_u$, $\omega^2_{uc}(x,t)=\omega^2_{u0}(x,t)-t$.

$$\bar{u}^0=\begin{cases} r(x,t)=\omega^2_{uc}(x,t),(x,t)\in G_u, r(x,t)=0,(x,t)\notin G_u,\\ \{u^0(\tau)\mid t\le\tau<t+r\}, r(x,t)>0,(x,t)\in G_u\\ u^0(t),(x,t)\in G_u, r=0\\ u^{ext}(x,t),(x,t)\notin G_u\end{cases}.$$

Неопределенность $v^0(t)$ является максимальной по Парето в задаче (4) при применении r-стратегии $u^*=\bar{u}^0$, то есть в задаче $<\bar{V},(I^1(\bar{u}^0,v)=g^1\left(x(T)\right),...,I^N(\bar{u}^0,v)=g^N\left(x(T)\right)>$.

Требование $x^0(t)\in(G_u\setminus\partial G_u),t\in[t_0,T]$ является достаточным условием максимальности по Парето неопределенности $v^0(t)$ при применении r - стратегии $u^*=\bar{u}^0$.

Это следует из свойств u- стабильного моста G_u и экстремальной стратегии $u^{ext}(x,t)$ и доказывается аналогично тому, как это было сделано в [1].

Порождается та же максимальная по Парето траектория $x^0(t)$, которая порождается при применении позиционной стратегии $u^*=u^0(x,t)$.

В то же время получать информацию об $x^0(t)$ надо не более, чем счетное число раз.

По аналогии можно построить минимум по Парето при применении помехой r - стратегии.

Заключение

Основными результатами данной работы являются определения достаточных условий существования максимумов и минимумов по Парето в позиционных и в r - стратегиях с применением конструкций стабильных мостов. Построенный максимум по Парето в r - стратегиях порождает ту же траекторию, что и максимум по Парето, когда ЛПР применяет позиционные стратегии. Найденная r - стратегия позволяет получить информацию об этой траектории дискретным образом.

В следующей работе на эту же тему нужно определить необходимые условия существования различных оптимумов по Парето. Развитый в данной работе подход можно применить и для изучения других принципов оптимальности для многокритериальных дифференциальных задач.

Литература

1. *Кононенко А.Ф., Мохонько Е.З.* О процессе получения информации в неантагонистических дифференциальных играх. – М.:ВЦ АН СССР,1982. – 20с.
2. *Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.* Игровые задачи управления и поиска. – М.: Наука.1978. – 270с.
3. *Мохонько Е.З.* Оптимум по Слейтеру в многокритериальной дифференциальной задаче принятия решений при неопределенности // Сборник научных трудов XIV Всероссийской с международным участием школы – симпозиума АМУР – 2020, Симферополь – Судак,14 – 27 сентября 2020. – Симферополь: И. П. Корниенко А.А., 2020. – С.243-251.
4. *Жуковскиий В.И., Салуквадзе М.Е.* Оптимизация гарантий в многокритериальных задачах управления. – Тбилиси: Мецниереба,1996. – 475с.
5. *Жуковский В.И. , Жуковская Л.В.* Риск в многокритериальных и конфликтных системах при неопределенности. – М.: Издательство ЛКИ,2010. – 272с.
6. *Красовский Н.Н., Субботин А.Н.* Позиционные дифференциальные игры. – М.: Наука,1974. – 456с.
7. *Кононенко А.Ф.* Структура оптимальной стратегии в динамических управляемых системах. //Ж. вычисл. матем. и матем. физ.Т.20.1980, №5. – С.1105-1116.
8 . *Мохонько Е.З.* Динамика информационных процессов в неантагонистических играх. Дис. ... д.ф.-м. наук. – М. ВЦ АН СССР,1997. – 350с.