ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ГЕНЕРАЦИИ ЗАДАЧИ ПОЛИЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Лукацкий А.М.

Институт энергетических исследований Российской академии наук (ИНЭИ РАН), 31-2, Нагорная ул., Москва, Россия

macrolab@eriras.ru

Аннотация. Рассматриваются модели, основанные на полилинейных функциях. Ранее была предложена форма представления исходной задачи полилинейного программирования в виде двух таблиц: таблицы мономов, таблицы полилинейных ограничений и критерия. В данной работе две таблицы объединяются в одну, которая включает таблицы мономов и полилинейных функций. Она создается в экранном редакторе и сохраняется в последовательном файле. Пользователь может в редакторе считывать описание задачи полилинейного программирования, корректировать ее параметры, в определенной степени и структуру модели и запускать оптимизацию. Предложены формулы оценки полилинейных ограничений с контролем на слабость и несовместность. Технология иллюстрируется на различных моделях. Для конкретной билинейной модели обосновывается, что полученное решение задачи полилинейного программирования дает абсолютный максимум критерия.

Ключевые слова: полилинейное программирование, табличное представление модели, обобщенный метод релаксаций, слабые ограничения, абсолютный экстремум.

Введение

Модели, в которых главной формой описания служат полилинейные функции (ПФ), встречаются во многих областях. Например, таковыми являются различного рода модели балансового типа, описанные в [1]. Основным методом решения таких задач служит обобщенный метод релаксаций (ОМР), в котором исследуемая модель приводится к задаче полилинейного программирования (ПП), [2]. Предложенный в [2] алгоритм использовался в [3]. Имеется реализация ОМР в комплексе CREATOR-DIGGER [4-6]. В этой технологии задача ПП имеет алгебраическое описание в виде иерархического набора взаимосвязанных ПФ.

В тоже время, для определенного класса моделей более удобной оказывается форма представления исходной задачи ПП в виде большой сводной таблицы: В первом варианте такая форма представления задачи ПП предложена в [2] в виде двух табличных структур, в обозначениях [2] это:

таблица мономов HM;

таблица полилинейных ограничений SM

В описываемом походе таблицы *HM* и *SM* объединяются в одну сводную таблицу, обозначаемую *T*, синтаксис которой описывается ниже.

Таблица *T* мономов и ПФ создается пользователем в экранном редакторе и сохраняется в текстовом файле, который затем обрабатывается системой. В процессе работы с моделью пользователь может считывать в удобно обозримой форме описание задачи ПП, многократно корректировать как параметры рассматриваемой модели, так и до определенной степени ее структуру . После того, как модель сформирована, пользователь запускает в режиме on-line процедуру решения задачи математического программирования с выдачей результатов в удобной форме.

Для конвертирования табличного *T*-представления задачи ПП в формат, который затем может обрабатываться процедурой решения задачи математического программирования, разработан диалоговый программный комплекс.

1 Описание задачи ПП в виде одной сводной таблицы

Таблица *T*, используемая для представления задачи полилинейного программирования, имеет следующую структуру.

Столбцы *T* разбиваются на 2 группы:

1. мономы $\{mon_1, \ldots, mon_r\}$, присутствующие в полилинейных ограничениях и критерий задачи ПП;
2. свободный член ограничений *add*.
3. Строки таблицы *T* разбиваются на 3 группы:
4. переменные модели $\{var_1, \ldots, var_n\}$;
5. полилинейные ограничения модели $\{pol_1, \ldots, pol_m\}$;
6. полилинейный критерий оптимизации *obj*.

Алгоритм построения задачи ПП по таблице *T* следующий.

Шаг 1. В строке переменной var_k и столбце монома mon_l ставится 1, если эта переменная входит в данный моном, в противном случае 0. Столбец *add* для этой строки нулевой.

Шаг 2. В строке полилинейного ограничения pol_k и столбце монома mon_k вводится величина коэффициента при этом мономе в полилинейном ограничении. В столбец *add* в этой строке вводится величина свободного члена в ограничении pol_k.

Шаг 3. В строке полилинейного критерия *obj* и столбце монома mon_k вводится величина коэффициента при этом мономе в полилинейном критерии. В столбец *add* в этой строке вводится величина свободного члена в критерии *obj*.

Работая в редакторе, пользователь может менять

1) коэффициенты и свободный член в каждом ограничении и критерии. Эти модификации относятся к параметрам модели;
2) признак {0;1} инцидентности переменной моному. Эти модификации относятся к структуре модели.

Описанный комплекс имеет преимущества при генерации моделей, в которых основными являются скалярные показатели, либо векторные и матричные показатели, но такие, что в модели имеются операции над их фрагментами, не имеющие удобного выражения в векторном или матричном виде. Подобный тип модели описан в примере 1.

1 Контроль ограничений задачи ПП на слабость и несовместность

В ситуации, когда ограничения модели представлены в виде линейной комбинации мономов, можно предложить следующий алгоритм контроля ограничений на слабость и несовместность.

В этом параграфе предположим, что для каждой переменной модели имеются двусторонние диапазонные ограничения:

$ak \le vark \le bk$, $1\le k \le n$. (1)

Преобразованиями сдвига и масштабирования переменных можно привести диапазонные ограничения к нормализованному виду:

$0 \le var1k\le 1$, $1\le k \le n$. (2)

Тогда алгоритм контроля ограничений на слабость и несовместность приобретает следующий вид. Для каждой из ПФ

$poll = a1* mon1 + \ldots + at * mont + \ldots + ar * monr + addl$ (3)

$1\le l \le m$ в формулу (4)

1. Подставим вместо монома mon_t , $1\le t \le r$, 1, если коэффициент a_t при этом мономе в ПФ положителен, 0 – , если отрицателен. Просуммируем по всем мономам и прибавим свободный член add_l, получим величину v_l .
2. Подставим вместо монома mon_t , $1\le t \le r$, 0, если коэффииент a_t при этом мономе в ПФ положителен, 1 – , если отрицателен. Просуммируем по всем мономам и прибавим свободный член add_l, получим величину u_l .

Предложение 1.

Для полилинейной функции pol_l ее величина, когда переменные принимают значения в диапазонах (2), будут лежать в диапазоне:

$ul \le poll \le vl$. (5)

Следствие 1.

1. Если диапазон (4) лежит в отрицательной полупрямой, $v_l < 0$, то ограничение, задаваемое ПФ pol_l , несовместно, а значит, и вся система ограничений модели несовместна.
2. Если диапазон (4) лежит в неотрицательной полупрямой, $u_l \ge 0$, то ограничение, задаваемое ПФ pol_l , слабое, а значит, его можно удалить из системы ограничений модели.

2 Примеры задач ПП, решаемых с применением описанной технологии

Приведем пример записи в виде ПФ известной в линейной алгебре операции векторного произведения. Пусть в модели имеются векторные переменные u[i], v[i], w[i] , векторный индикатор s[i], $1 \leq i \leq 3$ и скалярный индикатор q. Тогда операция векторного произведения $u \times v = s$ описывается тремя билинейными ПФ:

s[1] = u[2]*v[3] – u[3]*v[2]

s[2] = -u[1]*v[3] + v[1]*u[3]

s[3] = u[1]*v[2] - u[2]*v[1]

Приведем также трилинейную ПФ, выражающую ориентированный объем параллелепипеда, натянутого векторами u,v,w :

q = u[1]*v[2]*w[3] + u[2]*v[3]*w[1] + v[1]*w[2]*u[3] – u[3]*v[2]*w[1] - u[2]*v[1]*w[3]– v[3]*w[2]*u[1]

В таблицах 1-2 описывается модель, решающая геометрические задачи, связанные с этими операциями.Построить три вектора по условиям:

- векторное произведение первых двух попадает в заданный диапазон;
- ориентированный объем параллелепипеда, натянутого тройкой векторов максимален.

Координаты диапазона в условиях задачи специфицируются на этапе запуска оптимизации.

Таблица 1. Фрагмент 1 полилинейной модели, описывающей операции над векторами.

	mon1	**mon2**	**mon3**	**mon4**	**mon5**	**mon6**	**Add**
u[1]			1		1		
u[2]	1					1	
u[3]		1		1			
v[1]				1		1	
v[2]		1			1		
v[3]	1		1				
w[1]							
w[2]							
w[3]							
s[1]	1	-1					
s[2]			-1	1			
s[3]					1	-1	
Q							

Таблица 2. Фрагмент 1 полилинейной модели, описывающей операции над векторами.

	mon7	**mon8**	**mon9**	**mon10**	**mon11**	**mon12**	**Add**
u[1]	1					1	
u[2]		1			1		
u[3]			1	1			
v[1]			1		1		
v[2]	1			1			
v[3]		1				1	
w[1]		1		1			
w[2]			1			1	
w[3]	1				1		
s[1]							
s[2]							
s[3]							
Q	1	1	1	-1	-1	-1	

В таблицах 3-5 иллюстрируется представление в редакторе таблицы *T* для другой модели.

Модель содержит 12 переменных: var_1, var_2, var_3, var_4, var_5, var_6, var_7, var_8, var_9, var_{10}, var_{11}, var_{12}.

Ограничения модели имеют вид:

pol1 = var2*var6 – var3*var5 + var8*var12 – var9*var11 -1 ≥ 0

pol2 =-var1*var6 + var3*var4 – var7*var12 + var9*var10 +2 ≥ 0

pol3 =32*var1*var5 – var2*var4 - var7*var11 + var8*var10 -8 ≥ 0 pol4 =-var2*var12 – var3*var11 + var5*var9 + var6*var8 +1≥ 0

pol5 = var1*var12 + var3*var10 – var4*var9 – var6*var7 +2 ≥ 0

pol6 = -var1*var11 + var2*var10 + var4*var8– var5*var7 +3 ≥ 0

Целевая функция задается следующим образом:pol_7 = var_1*var_4 + var_2*var_5 – var_7*var_{10} – var_8*var_{11}
Диапазонные ограничения на переменные имеют вид (2).

Таблица *T* включает 36 столбцов, соответствующих мономам второго порядка, и столбец свободных членов ограничений. Из этих мономов образуются семь ПФ. где первые шесть – это ограничения модели, а седьмая ПФ является критерием оптимизации.

Из предложения 1 и следствия 1 вытекает, что ограничения, задаваемые ПФ pol_2 , pol_5 , pol_6 , являются слабыми. Для критерия pol_7 задачи ПП с использованием диапазона (4) получается оценка сверху:

pol7 ≤ 2. (6)

Таблица 3. Фрагмент 1 полилинейной модели в редакторе ввода и корректировки моделей.

	mon1	mon2	mon3	mon4	mon5	mon6	mon7	mon8	mon9	mon10	mon11	mon12
var1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
var2	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
var3	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
var4	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
var5	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
var6	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
var7	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
var8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
var9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
var10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
var11	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
var12	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
pol1	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0
pol2	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
pol3	32	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
pol4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
pol5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
pol6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
pol7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
column code	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Таблица 4. Фрагмент 2 полилинейной модели в редакторе ввода и корректировки моделей

	mon13	mon14	mon15	mon16	mon17	mon18	mon19	mon20	mon21	mon22	mon23	mon24
var1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
var2	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
var3	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
var4	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
var5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
var6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
var7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
var8	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
var9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
var10	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
var11	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
var12	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
pol1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
pol2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
pol3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
pol4	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	1	0	1
pol5	0	1	0	0	1	0	0	-1	0	0	-1	0
pol6	-1	0	1	0	0	0	1	0	-1	0	0	0
pol7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
column code	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

Таблица 5. Фрагмент 3 полилинейной модели в редакторе ввода и корректировки моделей.

	mon25	mon26	mon27	mon28	mon29	mon30	mon31	mon32	mon33	mon34	mon35	mon36	free member	row code
var1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	37
var2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	38
var3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	39
var4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	40
var5	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	41
var6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	42
var7	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	43
var8	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	44
var9	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	45
var10	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	46
var11	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	47
var12	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	48
pol1	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	-1	49
pol2	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2	50
pol3	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-8	51
pol4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	52
pol5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	53
pol6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	54
pol7	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	-1	0	0	55
column code	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	0	0

Описанная в таблицах 3-5 модель является билинейной и имеет декомпозицию на 2 линейные фазы. При запуске процедуры ОМР было установлено максимальное число итераций при поиске оптимального решения, – 100. Однако, процедуре ОМР потребовалось всего 2 итерации для получения оптимального решения. Начальное значение критерия при начальном значении всех переменных 0.5 составляло 0, впрочем, в начальной точке система ограничений имеет невязки (pol_1 = -1, pol_3 = - 0.5), поэтому его нельзя сопоставлять со значением в точке максимума, где невязки погашены), и было улучшено ОМР до 2. Заметим, что верхняя оценка (5) для критерия здесь достигнута, таким образом, система нашла абсолютный максимум при следующих значениях переменных:

var1 =1, var2 =1, var3 = 0, var4 = 1, var5 = 1, var6 = 0.5, var7 =0, var8 =1, var9 = 0,

var10 = 0.5, var11 = 0, var12 = 0.5.

3 Машинная реализация

Описанный комплекс реализован в среде Microsoft Visual Studio 2008 под операционной системой WINDOWS-10. Был использован язык программирования Visual BASIC, а для информационной поддержки – MS EXCEL-2010. Все расчеты проводились в среде Visual BASIC.

Программное обеспечение описанной системы оформлено авторским свидетельством в аспекте табличной формы представления ОМР как самостоятельного метода математического программирования – [7].

4 Сравнение с аналогами

В качестве аналога описанной выше технологии можно указать систему MATLAB [8]. Описанная в докладе технология имеет преимущества при генерации неоднородных полилинейных моделей, в которых основными являются скалярные показатели, а при наличии векторных и матричных характеристик, операции над их фрагментами не выполняются в виде векторно-матричных. Он позволяет, в частности, проводить анализ на слабость и несовместность ограничений модели не только для линейных фаз задачи ПП как это принято в традиционных технологиях, но и для задачи ПП в целом. Это позволяет в отдельных случаях констатировать абсолютный экстремум задачи ПП.

Выводы

Для определенного класса задач ПП удобно иметь компактную обозримую форму их представления. Предложенный подход позволяет свести в одну таблицу переменные модели, наложенные на них ограничения и критерий, а также весь перечень мономов, входящих в состав ПФ задачи ПП. Для моделей, допускающих такое представление, режим редактирования позволяет пользователю-непрограммисту быстро и эффективно проводить различного рода машинные эксперименты, в которых варьируются как параметры модели, так и определенные структурные аспекты. Также появляются новые возможности контроля ограничений на слабость, установление факта достижения экстремума.

Литература

1. *Lukatskii A.M., Malakhov V.A,* "Computer System of Organization of Multilinear Optimization Calculations on Models of Balance Type," Published in: 2020 13th International Conference "Management of large-scale system development" (MLSD), Date of Conference: 28-30 Sept. 2020, Date Added to IEEE Xplore: 09 November 2020, DOI: 10.1109/MLSD49919.2020.9247831, Publisher: IEEE Publication Year: 2020, Page(s): 1 - 5.
2. *Лукацкий А.М., Шапот Д.В.,* "Методы решения задач полилинейного программирования," Журнал вычислительной математики и математической физики, т. 41, №. 5, 2001, с. 680-691.
3. *Antonucci A., de Campos C.P., Huber D., Zaffalon M.,* "Credal Network Inferences by Linear Programming, in Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty," Proceedings 12ty Eurepean Conference, ESCQARU 2013, Utrecht, The Netherlands, 2013, pp. 13-24.
4. *Малахов В.А., Лукацкий А.М., Шапот Д.В.,* "Модель взаимосвязей энергетики с экономикой (МЭНЭК)," Сертификат государственной регистрации компьютерной программы, No. 2018611677 5 февраля, 2018.
5. *Карбовский И.Н.,* "Технология полилинейного программирования в естественно-обусловленных моделях. I ," Автоматика и телемеханика, 2014, № 9, с., 83-96.
6. *Карбовский И.Н.,* "Технология полилинейного программирования в естественно-обусловленных моделях. II, ," Автоматика и телемеханика, 2015, № 1, с.с. 91-100.
7. *Лукацкий А.М., Шапот Д.В.,* "MULTILINPROGRAM, " Сертификат государственной регистрации компьютерной программы, No. 2018619802, 13 августа, 2018.
8. *Cleve Moler*, "The Growth of MATLAB and The MathWorks over Two Decades". News & Notes News letter. MathWorks.(January 2006). Retrieved August 14, 2013.