ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ОБЪЕМ ПЕРЕДАВАЕМОЙ ИНФОРМАЦИИ

Горелов М.А., Ерешко Ф.И.

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН
Россия, г. Москва ул. Вавилова, д. 44, кор. 2
griefer@ccas.ru, fereshko@yandex.ru

Аннотация: Рассматривается новый класс теоретико-игровых моделей, общей чертой которых является наличие информационных обменов между игроками, ограниченных по объему. Показывается, что учет такого рода ограничений позволяет существенным образом расширить класс ситуаций, которые можно адекватно описать с помощью игр в нормальной форме.

Ключевые слова: теория иерархических игр, информационная теория иерархических систем, теория информации.

Введение

В нескольких словах опишем одно из направлений развития теории игр. Оно связано с понятием информации. Важность информации в теоретико-игровых моделях была осознана уже в первых работах по теории игр (см., например, [1]). Но затем, путем перехода к нормальной форме все информационные аспекты оказались «спрятанными» в сложной структуре стратегий. Затем о стратегиях стали мыслить как об «элементарных» объектах, и информационные аспекты ушли на второй план.

Определенный возврат к этим вопросам произошел независимо в теории метаигр Н. Ховарда [2] и теории иерархических игр Ю.Б. Гермейера [3]. Но в этих теориях множества управлений игроков и неопределенных факторов, как правило, мыслились бесконечными (чаще всего подразумевалось, что эти множества – это компактные подмножества евклидовых пространств). Как следствие получалось, что множества стратегий некоторых игроков – это сложные, бесконечномерные пространства. А использование таких стратегий неявно предполагало обработку бесконечно больших объемов информации.

В теории иерархических игр ставился и вопрос об оптимальной (с точки зрения одного из игроков) информационной структуре. Но ответы на подобные вопросы получались не слишком интересными: несложно понять, что чем большей информацией обладает выделенный игрок, тем для него лучше. Правда, довольно скоро было выяснено, что в большинстве интересных случаев имеет место эффект насыщения, то есть увеличение информированности сверх некоторого предела не приносит дополнительной выгоды. Но этот предел в большинстве случаев оказывался весьма значительным, а потому не вполне верно отражающим действительность.

Причина этого была понятна уже давно. На практике обработка информации всегда требует затрат сил и времени, а иногда и материальных ресурсов. Все это не находило отражения в существующих моделях.

Кроме того, в классических моделях «содержание» информации определялось «правилами игры», а сами игроки никак не могли на него влиять. Напрашивается вопрос о «рациональном» выборе информационной структуры. Но ставить вопрос об оптимальном содержании информации в отрыве от ее количества не интересно. Ответ будет понятным: нужно использовать всю доступную информацию.

Поэтому на определенном этапе развития теории появляется необходимость явного учета в моделях ограничений на объем передаваемой информации. Но с этим имеется ряд проблем.

1 О количестве информации

До недавнего времени модели, в которых хоть как-то учитывались ограничения на объём передаваемой информации, исследовались только в работах В. С. Алиева и А.Ф. Кононенко [4–5]. Этими авторами рассматривалось два способа ограничения количества информации. В первом из них параметрически задавалось множество «приемлемых» способов, и из них выбирался оптимальный. Во втором количество информации характеризовалось топологической размерностью пространства возможных сообщений.

Задача в первой постановке успешно исследуется стандартными методами анализа иерархических игр. Правда, как выяснилось, найденные решения такой задачи крайне нерегулярны. Во-первых, решение в типичной ситуации может сильно меняться при сколь угодно малых изменениях параметров модели. А во-вторых, в структуре самого решения естественным образом возникают всюду разрывные функции, кривые Пеано и другие теоретико-множественные «монстры». Это явно связано с неадекватным способом задания ограничений на объем передаваемой информации [6–7].

Задачу во второй постановке тоже удалось решить при весьма общих предположениях [8]. Получился весьма красивый математический результат. Об этом будет сказано ниже.

Однако, и этот способ не вполне адекватно описывает сущность исследуемого явления. Поэтому пришлось обратиться к работам по теории информации.

Одна из работ А. Н. Колмогорова по теории информации [9] называлась «Три подхода к определению понятия «количество информации». И эта работа до сих пор остается актуальной. На самом деле наличие трех подходов свидетельствует о том, что каждый из них чем-то не удовлетворителен. Более того, пока даже соотносить эти подходы можно только на неформальном уровне.

Теоретико-игровые модели более структурированы, чем модели теории информации, поэтому удалось выделить не три, а восемь осмысленных постановок (включая уже описанные). Лишь некоторые из них в настоящее время исследованы.

Наиболее исследована постановка, в которой количество передаваемой информации характеризуется мощностью множества возможных сообщений. Нетрудно выяснить, что в типичном случае максимальный возможный результат можно получить уже для конечных множеств сообщений, поэтому количество информации можно измерять просто натуральным числом (или двоичным логарифмом этого числа, что соответствует привычному измерению «в битах»). Уже эта постановка позволяет выявить ряд интересных качественных особенностей и расширить класс доступных исследованию моделей. Остановимся на некоторых из них.

2 Способ формализации

Опишем, как это формализуется в простейшем случае игры двух лиц с обратной связью.

Будем рассматривать игру двух лиц $\Gamma = \langle U, V, g, h \rangle$, где U и V – компактные метрические пространства, а g и h – непрерывные функции из $U \times V$ в множество действительных чисел. Элементы множеств U и V интерпретируются как управления первого и второго игроков. Их интересы описываются стремлением к максимизации значений функций g и h соответственно.

Рассмотрим следующую схему взаимодействия игроков. Первый игрок вправе задать партнеру n вопросов относительно выбранного им управления $v \in V$ и получить на них правдивые ответы. Каждый из этих вопросов должен допускать ответ «да» или «нет». Следуя традиции, будем кодировать ответ «да» единицей, а ответ «нет» – нулем. Окончательный выбор своего управления $u \in U$ первый игрок осуществляет после получения ответов на свои вопросы. Однако он заранее выбирает список вопросов и план своих действий при всех возможных вариантах ответов. Эта информация становится известной второму игроку. В этих условиях второй игрок может однозначно соотнести свой выигрыш с выбором своего управления, а потому его поведение становится предсказуемым: он будет выбирать управления из условия максимума своего критерия. Неопределенность остается лишь в том случае, когда точек максимума несколько. Будем считать, что первый игрок осторожен по отношению к этой неопределенности и стремится максимизировать свой гарантированный результат.

Дадим точные определения. Каждой системе из n вопросов рассматриваемого типа соответствует набор из $2n$ подмножеств

$$\left(X_1^0, X_1^1\right), \left(X_2^0, X_2^1\right), \ldots, \left(X_n^0, X_n^1\right) \qquad (1)$$

пространства V, разбитый на пары. В множество X_t^1 входят те и только те управления $v \in V$ второго игрока, при выборе которых на вопрос с номером t следует ответить «да». А множество X_t^0 содержит те управления, которые соответствуют ответу «нет» на вопрос с номером t. Разумеется, должны выполняться условия

$$X_t^0 \cap X_t^1 = \varnothing,\ X_t^0 \cup X_t^1 = V,\ t = 1, \ldots, n. \qquad (2)$$

Каждому булеву вектору $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ из множества $N = \{0,1\}^n$ можно поставить в соответствие множество $X^r = \bigcap_{t=1}^{n} X_t^{r_t}$. Получив ответы $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ на свои вопросы, первый игрок может и должен выбрать управление $u^r \in U$. Таким образом, стратегия первого игрока определяется заданием $2n$ множеств вида (1), удовлетворяющих условиям (2), и $m = 2^n$ управлений $u^r \in U$, $r \in N$.

Если первый игрок зафиксировал свою стратегию такого вида, а второй игрок выберет управление $v \in V$, то игроки получат выигрыши $g(u^r,v)$ и $h(u^r,v)$ соответственно, где ответ r однозначно определяется условием $v \in X^r$.

Удобно определить функцию $P{:}V \to N$ условием $P(v) = r$, если $v \in X^r$ и такую функцию $u_*{:}N \to U$, что $u_*(r) = u^r$. Тогда стратегию первого игрока можно отождествить с парой функций (u_*,P), а выигрыши игроков будут определяться функционалами $g_*((u_*,P),v) = g(u_*(P(v)),v)$ и $h_*((u_*,P),v) = h(u_*(P(v)),v)$.

Таким образом, получаем новую игру в нормальной форме $\Gamma_* = \langle U_*,V,g_*,h_*\rangle$, где U_* – множество всех стратегий (u_*,P), а функции g_* и h_* определены так, как описано выше.

С игрой Γ_* можно работать так же, как с игрой Γ, например, искать максимальный гарантированный результат первого игрока или ситуации равновесия по Нэшу. Но можно получить и более содержательные результаты, поскольку эта игра наделена определенной дополнительной структурой.

Отметим, что в этой структуре уже учтены ограничения на объем обрабатываемой первым игроком информации. А, кроме того, отображение P задает «содержание» получаемой им информации, а это отображение выбирает сам первый игрок.

3 Максимальный гарантированный результат

Наиболее простой моделью интересующего нас типа является игра двух лиц типа Центр–Агент. В этом случае обычно предполагают, что Центр обладает правом первого хода. А тогда единственным разумным принципом оптимальности является принцип максимального гарантированного результата. Остановимся подробно именно на этом простейшем случае.

Традиционно максимальный гарантированный результат определяется следующим образом.

Старое определение. Фиксируем положительное число κ. Зададим множество $B(u_*,P)$ рациональных откликов второго игрока на стратегию (u_*,P) условиями

– $B(u_*,P) = \left\{ v \in V : h(u_*(P(v)),v) = \max\limits_{w \in V} h(u_*(P(w)),w) \right\}$, если верхняя грань $\sup\limits_{w \in V} h(u_*(P(w)),w)$ достигается;

– $B(u_*,P) = \left\{ v \in V : h(u_*(P(v)),v) \geq \sup\limits_{w \in V} h(u_*(P(w)),w) - \kappa \right\}$ в противном случае.

Максимальный гарантированный результат первого игрока R равен

$$R = \sup \inf_{v \in B(u_*,P)} g(u_*(P(v)),v),$$

где верхняя грань берется по множеству всех его стратегий (u_*,P).

Можно сформулировать альтернативное определение.

Новое определение. Число γ называется гарантированным результатом первого игрока, если существуют число λ и стратегия u_*, для которых выполняются следующие два условия:

- найдется такая стратегия $v \in V$ для которой $h(u_*(P(v)),v) \geq \lambda$;
- для любой стратегии $v \in V$ либо $g(u_*(P(v)),v) \geq \gamma$, либо $h(u_*(P(v)),v) < \lambda$.

Точная верхняя грань гарантированных результатов называется максимальным гарантированным результатом.

Несложными геометрическими рассуждениями показывается, что эти два определения эквивалентны.

Интерпретация нового определения такова. Стратегия u_* позволяет гарантированно получить результат γ, если все множество стратегий разбивается на две части: стратегии из первой части не будут выбраны вторым игроком, потому что он получает маленький выигрыш ($h(u_*(P(v)),v) < \lambda$), а при любом выборе стратегий из второй части первый игрок получит не меньше γ. Разумеется, вторая часть должна быть непустой, поскольку какую-то стратегию второй игрок должен выбрать.

Наличие второго пункта в старом определении делает его не слишком эстетичным. Но с этим можно было до поры до времени мириться. Однако игры с ограничениями на объем передаваемой информации заметно сложнее классических моделей. И работать со старым определением становится слишком сложно.

Новое определение заметно проще старого. Этому утверждению можно придать точный математический смысл. Например, если записать оба определения на каком-то формальном языке, скажем, языке исчисления предикатов, то новое определение окажется вдвое короче старого.

Переход на формальный язык дает и неплохой метод получения достаточно интересных результатов с помощью эквивалентных преобразований соответствующих формул.

А, кроме того, более простая постановка задачи позволяет взглянуть на некоторые области исследования с единых позиций. Например, до недавнего времени теория игр с неопределенными факторами представлялась нам как набор очень трудных задач, формально друг с другом никак не связанных. Каждый раз автор угадывал решение (и затем доказывал его оптимальность). Причем в ряде случаев структура решения оказывалась настолько сложной, что возможность ее угадать уже выходит за грань нашего понимания. Благодаря новому определению эта структура возникает «сама собой» из чисто формальных выкладок. А кроме того появляется возможность систематизировать возможные постановки задачи (по связанным с ними формулам исчисления высказываний) и даже оценить возможность конструктивного решения отдельной задачи.

Приведем точную формулировку одного из результатов, относящихся к поставленной выше простейшей задаче [10].

Теорема. Пусть

$$c(\gamma)=\sup_{u^0\in U}\sup_{u^1\in U}\ldots\sup_{u^{m-1}\in U}\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\min\left\{\sup_{v\in V}\max_{r\in N}\min h(u^r,v)-\lambda,\inf_{v\in V}\max_{r\in N}\max\left[g(u^r,v)-\gamma,\ \lambda-h(u^r,v)\right]\right\}$$

Максимальный гарантированный результат первого игрока в игре Γ_* является наименьшим решением уравнения $c(\gamma) = 0$.

Можно получить и некоторые качественные выводы.

Для иерархических игр характерна следующая структура оптимальной стратегии игрока верхнего уровня: в зависимости от выбора второго игрока он либо наказывает партнера, либо максимизирует свой собственный выигрыш. В играх без ограничений на объем передаваемой информации наказание можно использовать во всех случаях, кроме одного. Ясно, что на практике такой «стиль управления» является эффективным далеко не всегда. Это в известной мере дискредитирует классическую постановку задачи. В игах с ограничениями на информационные обмены ситуация заметно смягчается. В этом случае соотношение между «политикой кнута» и «политикой пряника» в значительной степени определяется сложностью соответствующих задач (причем понятию сложности в этом контексте можно дать точное определение) [10].

4 Некоторые новые постановки задач

С появлением понятия «количество информации» можно по-новому повернуть вопрос об «оптимальных» информационных обменах. Если объем перерабатываемой информации не ограничен, то задача, в общем-то тривиальна: в оптимуме нужно обрабатывать всю доступную информацию. Если появляется возможность оценить количество получаемой игроком информации, то с ними можно связать затраты на ее добывание и обработку. И эти затраты естественно учитывать в целевой функции игрока. И тогда ответ на вопрос об оптимальном способе обмена информацией становится не столь очевидным и, пожалуй, более осмысленным. Такого рода модели удается построить и исследовать [11].

До недавнего времени рассматривались в основном модели, в которых игрок верхнего уровня получает лишь достоверную информацию. Как удалось выяснить, это неслучайно. Можно показать, что в играх без внешней неопределенности появление возможности получения недостоверной информации не увеличивает максимального гарантированного результата игрока верхнего уровня.

Как отметил в личной беседе Н. С. Кукушкин, ситуация, когда достоверность получаемой игроком верхнего уровня информации гарантирована, соответствует случаю, когда он сам «добывает» информацию о действиях партнера. На практике же гораздо чаще встречаются случаи, когда игроки нижнего уровня передают наверх отчеты о своей деятельности. И тут возможны варианты.

Во-первых, информация может искажаться при передаче (из-за технических сбоев или пресловутого «человеческого фактора»). Ввиду сказанного выше, случай, когда информация может искажаться как угодно, не представляет интереса. Гораздо интереснее случай, когда искажается лишь «часть» передаваемой информации, но получающему ее игроку не известно, какая именно часть оказалась искаженной. В моделях без ограничений на объем передаваемой информации не удается получить осмысленного формального описания такой ситуации. На качественном уровне это понятно: передаваемую информацию можно многократно дублировать, и таким образом на этапе ее обработки исключать появившиеся ошибки.

В случае игр с ограниченными объемами передаваемой информации удается реализовать как интервальный, так и стохастический вариант модели [12–13]. В обоих вариантах задачи вычисления максимального гарантированного результата оперирующей стороны удается решить. И полученные результаты имеют достаточно разумную интерпретацию.

А во-вторых, игрок нижнего уровня может злонамеренно искажать информацию о своих действиях. Опять-таки понятно, что случай, когда игрок верхнего уровня никак не может контролировать достоверность этой информации, мало интересен. В случае, когда объем передаваемой информации ограничен, можно говорить о ситуации, в которой игрок верхнего уровня может осуществлять «выборочный контроль» достоверности передаваемых сообщений. Здесь опять получается целый спектр осмысленных постановок задач, допускающих эффективное решение [14]. Как отметил один из рецензентов этой статьи, в таком контексте возможно даже исследование некоторых коррупционных схем, что на сегодняшний день весьма актуально.

5 Информационная теория иерархических систем

Уже в одной из первых работ по информационной теории иерархических систем Ю. Б. Гермейер и Н. Н. Моисеев [15] отмечали, что иерархия возникает там и поскольку, где и поскольку объем информации, необходимый для эффективного управления системой, оказывается слишком большим для того, чтобы его можно было обработать «в реальном времени». При этом приходится учитывать, что как только какой-то элемент системы получает право выбора управлений, сразу же у него появляются собственные интересы, далеко не всегда совпадающие с интересами системы в целом. Таким образом, имеется две тенденции. Возможное несовпадение интересов элементов говорит в пользу целесообразности централизации управления, а недостаток информации приводит к необходимости децентрализации управления.

На качественном уровне это было понятно уже в начале семидесятых годов прошлого века. Но количественные модели построить долгое время не удавалось именно из-за отсутствия меры количества информации.

Можно пойти по пути, намеченному выше. Рассмотрим систему Центр–Агент (или Агенты), но при наличии внешних неопределенных факторов. Предположим, агенты имеют точную информацию о реализовавшихся значениях неопределенных факторов. Кроме того, будем считать, что Центр тоже может получать информацию о неопределенных факторах, но в ограниченном объеме (количество информации можно определить так, как в разделе 2).

Можно сравнить две схемы управления. В одной Центр сосредотачивает в своих руках право выбора всех управлений. В другой он делегирует право выбора некоторых управлений агентам.

Выясняется, что все системы управления разбиваются на два класса. В первый класс входят системы, для которых централизованный способ управления более предпочтителен для Центра независимо от объема доступной ему информации. Существование таких систем не удивительно. Во второй класс входят системы, в которых при больших объемах доступной Центру информации выгоден централизованный способ управления, а при малых более предпочтительным становится децентрализованный способ управления.

Анализ примеров показывает, что целесообразность децентрализации управления в значительной мере определяется степенью согласованности интересов Центра и Агентов. Правда, формального определения понятия «степень согласованности интересов» на сегодняшний день нет.

Подробности можно найти в работах [16,17]. В первой из них эффективность оценивается гарантированным результатом Центра. Во второй предполагается, что множество неопределенных факторов наделено вероятностной мерой, и эффективность управления оценивается математическому ожиданию выигрыша Центра относительно этой меры.

6 Другие способы определения количества информации

Остановимся на альтернативных способах определения понятия «количество информации». Обсудим два из них, представляющихся нам наиболее интересными.

В разделе 2 мы считали, что информация кодируется словами в алфавите $\{0,1\}$ одинаковой длины. Можно рассмотреть и случай, когда используются слова, длина которых не превосходит заданной величины. Этот случай легко сводится к уже рассмотренному. Но можно предположить, что множество факторов, о которых передается информация, наделено вероятностной мерой. Тогда в качестве меры количества информации можно использовать математическое ожидание длины слова, которое получит Центр. Такой подход был предложен К. Шенноном на заре появления теории информации.

При таком определении количества информации можно ставить все задачи, рассмотренные выше. Правда, техника решения таких задач пока разработана недостаточно. На сегодняшний день удалось разобраться лишь с задачей централизованного управления из предыдущего раздела [18].

Второй способ определения количества информации уже упоминался выше. Он во многом связан с огромными объемами информации, перерабатываемой при управлении современными сложными системами. Предположим, что при управлении какой-то системой используется 1 терабайт информации. Понятно, что ситуация по существу не изменится, если мы увеличим этот объем на 1 мегабайт или уменьшим на 2 килобайта. Из сказанного ясно, что при таких объемах обычные числа не очень подходят для измерения количества информации. Нужно искать какую-то альтернативу.

Можно пойти традиционным путем и заменить большое конечное множество каким-то континуумом. И «размер» этого континуума использовать в качестве меры количества информации. Достаточно естественно, например, считать этот континуум наделенным топологией и в качестве «размера» использовать его размерность. Технически удобнее использовать размерность в смысле Лебега–Чеха. Одну из моделей такого рода можно найти в [8].

Довольно удивительно, что соответствующую задачу удалось решить до конца, то есть при весьма общих предположениях найти оптимальный способ агрегирования информации. При этом выяснилось, что задача имеет существенно глобальный характер. По этой причине локальные дифференциально-геометрические методы, использовавшиеся ранее В.С. Алиевым и А.Ф. Кононенко не слишком подходят для ее решения.

Полученные результаты имеют достаточно убедительную содержательную интерпретацию. В частности, если пытаться искать упомянутый выше континуум в классе всех нормальных топологических пространств со счетной базой, то оптимальный континуум можно найти в классе конечномерных симплициальных комплексов.

Заключение

Системы моделей, использующихся в различных областях знания развиваются «от простого к сложному». И это правильно. Поэтому правильно, что на определенном этапе развития теории игр ограничения на объемы передаваемой информации не учитывались. Конечно, это некоторая идеализация, но с ее помощью в ряде случаев удается получить вполне адекватные модели.

Но понятно также, что без учета этого обстоятельства некоторые процессы управления описать не удастся. И количество таких процессов в современном обществе быстро растет. Обработка «больших данных» уже прочно вошла в практику управления. И не учитывать это обстоятельство нельзя. Если в семидесятых годах прошлого века Ю.Б. Гермейер и Н.Н. Моисеев в основном говорили о затратах времени в процессе управления, то на сегодняшний день к этому добавляются и затраты немалых материальных ресурсов. И эти затраты как-то должны учитываться в моделях, если мы хотим, чтобы они были адекватными.

Поэтому описанное в докладе направление представляется весьма актуальным. Разумеется, пока есть больше вопросов, чем ответов. И связано это не в последнюю очередь с тем, что само понятие «информация» является сложным и многоаспектным. В данном контексте приходится учитывать, по меньшей мере, два аспекта: синтаксический, к которому относится понятие «количество информации», и прагматический, связанный с «качеством» принимаемых решений. Причем последний во многих случаях оказывается сложным сам по себе.

В самом деле, если в процессе управления принимает участие несколько субъектов, то необходимо придется как-то учитывать интересы каждого из них. А они могут быть существенно различными. Этот «субъективный» характер задачи, по нашему мнению, накладывает определенные ограничения на использование нейронных сетей или других подобных инструментов «в лоб»: обучать нейронную сеть в каждом отдельном случае может оказаться слишком дорого. Поэтому нужно предварительное, хотя бы качественное исследование задачи.

Исследование игр с ограниченными объемами передаваемой информации тоже идет «от простого к сложному». Поэтому в описанных выше моделях учитываются лишь самые общие черты моделируемых процессов. По этой причине вряд ли можно говорить об их непосредственном применении на практике. Но уже можно с уверенностью говорить, что некоторые общие подходы удалось нащупать.

Литература

1. *Фон Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970. – 707 с.
2. *Howard N.* Paradoxes of Rationality: Theory of Metagames and Political Behavior. Cambridge Mass.: MIT Press, 1971. – 248 p.
3. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976. – 327 с.
4. *Алиев В.С., Кононенко А.Ф.* Точное агрегирование в теоретико-игровых моделях. – М.: ВЦ РАН, 1990. – 26 с.
5. *Алиев В.С., Кононенко А.Ф.* Об агрегировании в динамических играх // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. № 8.– С. 1245–1259.
6. *Горелов М.А.* Параметрическая постановка задачи синтеза рациональных процедур обмена информацией в иерархической игре двух лиц // Автоматика и телемеханика, 2003. № 9. – С.103–112.
7. *Горелов М.А.* Линейный способ агрегирования информации в иерархических играх // Автоматика и телемеханика, 2004, № 11. – С. 131–140.
8. *Горелов М.А.* Топологическая постановка задачи об агрегировании информации в иерархических играх // Автоматика и телемеханика, 2021. № 2. – С. 149–168.
9. *Колмогоров А.Н.* Три подхода к определению понятия «количество информации» // Проблемы передачи информации. Т. 1. 1965. № 1. – С. 3–11.
10. *Горелов М.А.* Максимальный гарантированный результат при ограниченном объеме передаваемой информации // Автоматика и телемеханика, 2011, № 3. – С. 124 – 144.
11. *Горелов М.А.* Игры с дорогими информационными обменами // Управление большими системами. Вып. 49. М.: ИПУ РАН, 2014. – С.37–56.
12. *Горелов М.А.* Игра с ошибками при передаче информации // Автоматика и телемеханика, 2012. № 12. – С. 137 – 152.
13. *Горелов М.А.* Игры со случайными ошибками при передаче информации // Автоматика и телемеханика, 2015. № 12. – С. 135–153.
14. *Горелов М.А.* Иерархическая игра с умышленно искажаемой информацией // Автоматика и телемеханика, 2016. № 4. – С. 99–113.
15. *Гермейер Ю.Б., Моисеев Н.Н.* О некоторых задачах теории иерархических систем / Проблемы прикладной математики и механики. М.: Наука, 1971. – С. 30–43.
16. *Горелов М.А., Ерешко Ф.И.* Информированность и децентрализация управления // Автоматика и телемеханика. 2019. №6. – С. 156–172.
17. *Горелов М.А., Ерешко Ф.И.* Информированность и децентрализация управления (стохастический случай) // Автоматика и телемеханика. 2020. №1. – С. 52–66.
18. *Горелов М.А.* О количестве информации, необходимом для эффективного управления // Управление большими системами. Выпуск 88. М.: ИПУ РАН, 2020. – С. 41–68.