ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ОБЪЕМАМИ ИНФОРМАЦИИ О ВНЕШНЕЙ СРЕДЕ

Горелов М.А.

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, кор. 2

griefer@ccas.ru

Аннотация: Рассматривается системы моделей управления двухуровневой иерархической системой при наличии внешней неопределенности. Предполагается неодинаковая информированность субъектов о внешней среде. Исследуются вопрос о целесообразности добровольных обменов неверифицируемой информацией и тесно связанный с ним вопрос о целесообразности децентрализации управления системой.

Ключевые слова: принятие решений в условиях неопределенности, децентрализация управления, иерархические игры, информация, максимальный гарантированный результат.

Введение

Рассмотрим задачу управления двухуровневой иерархической системой в условиях неопределенности. Как обычно, будем считать, что элемент верхнего уровня обладает правом первого хода, то есть он первым выбирает свою стратегию и этот выбор становится известным его партнеру до того, как он примет свое решение. Будем предполагать, что наличие неопределенного фактора описывает недостаточную информированность элемента верхнего уровня о состоянии внешнего мира, а элемент нижнего уровня точно знает действительное значение неопределенного фактора.

В этих условиях у элемента нижнего уровня возникает возможность поделиться с партнером информацией о реализовавшемся значении неопределенного фактора. Но поскольку доступ последнего к этой информации ограничен, он не может проверить достоверность получаемой от партнера информации, а тогда у элемента нижнего уровня появляется соблазн исказить ее в своих корыстных интересах. Поэтому естественно возникает вопрос: что могут дать обмены такого рода недостоверной информацией?

Модели такого рода неоднократно рассматривались в теории иерархических игр [2,8], теории активных систем [1,11] и теории контрактов [9,12]. Но, во-первых, в этих работах достаточно детально описывалась структура управления системой. А, во-вторых, в них всегда предполагалось, что элементу верхнего уровня совсем не доступна информация о неопределенном факторе, а известно лишь множество его возможных значений. В данном докладе делаются лишь самые общие предположения о структуре управляемой системы, а, кроме того, предполагается, что элемент верхнего уровня способен сам получить какую-то достоверную информацию о неопределенном факторе, но объем этой информации ограничен. В случае, когда этот объем ограничен нулем, получается классическая модель. В общем случае можно задаться вопросом о том, как зависит решение задачи управления и получаемый результат от этого объема?

Оказывается, что поставленные вопросы тесно вязаны с вопросом о целесообразности децентрализации управления иерархической системой. В похожем контексте эти вопросы исследовались в [7]. Существенное отличие состоит в том, что в [7] предполагалось наличие определенной «технологической» структуры и ставился лишь вопрос о том, целесообразна ли децентрализация или нет? Ниже будет исследован вопрос о разумной степени децентрализации управления в и ее зависимости от объемов доступной информации.

Если ставить вопрос о целесообразной степени децентрализации «напрямую», то приходится работать с играми с запрещенными ситуациями [6]. Это не всегда удобно. Поэтому ниже выбран несколько иной подход: элемент нижнего уровня не сам выбирает управление партнера, а лишь сообщает ему о желательном выборе, а выбор осуществляет элемент верхнего уровня. Показывается, что это ничего не меняет по существу.

На самом деле возможны, по меньшей мере, два способа уточнения о целесообразной степени децентрализации управления. Возможна ситуация, когда элемент верхнего уровня желает без потери качества управления избавить себя от забот, связанных с выбором управлений. В таком случае разумно ставить вопрос о максимальной степени децентрализации. Но возможна и обратная ситуация, когда элемент верхнего уровня желает максимально сосредоточить власть в своих руках, например, желая обезопасить себя от неразумных действий партнера. Но как показывают приведенные ниже примеры, не всегда удается добиться приемлемого результата без использования децентрализации. В таком случае естественно ставить вопрос о минимально необходимой степени децентрализации, обеспечивающей получение приемлемого результата. Именно этот вопрос рассматривается далее.

Скажем несколько слов об используемой математической технике. Для получения основных качественных результатов достаточно лишь свободного владения понятием функции. Лишь немногие количественные результаты получаются с использованием простейших результатов топологии (достижимость максимума непрерывной функции на компактном множестве). Использование такого абстрактного подхода позволяет решить ряд существенных проблем.

В частности, появляется возможность систематически использовать прием, состоящий в «приведении к нормальной форме». Например, в разделе 2 исследуется модель, в которой явно описан процесс получения дополнительной информации первым игроком. Благодаря ее нормальной форме, эту модель можно чисто формально рассматривать как частный случай базовой модели. А это дает возможность в разделе 4 рассмотреть расширение этой сложной модели и использовать результаты, уже полученные в разделе 3. А, кроме того, это расширяет класс случаев, описываемых предлагаемыми моделями. Скажем, во всех рассмотренных моделях явно не описывается возможность получения первым игроком информации об управлении, выбранном его партнером. Но никто не запрещает предполагать, что стратегии первого игрока в базовой модели – это функции из множества управлений второго игрока в множество управлений первого. Поэтому все полученные качественные выводы относятся и к играм с обратной связью.

Ниже для простоты рассматривается модель с одним элементом нижнего уровня. Общий случай, разумеется, сложнее, но основная сложность появляется на этапе формирования модели, а не при ее исследовании. В самом деле, при наличии нескольких элементов нижнего уровня нетривиальной становится задача описания множества их рациональных решений. Если такой способ описания фиксирован, то общая задача обычно достаточно легко сводится к задаче с одним элементом нижнего уровня. Например, в [7] рассматривалась система «веерного» типа, в которой выигрыш одного элемента нижнего уровня не зависит от управлений других элементов нижнего уровня. В этом случае всех игроков нижнего уровня можно «объединить» в одного, просто перемножив их множества управлений и сложив функции выигрыша. Можно рассмотреть случаи, когда рациональными считаются ситуации равновесия по Нэшу или точки Парето. Вариантов здесь великое множество, и выбор одного из них должен диктоваться особенностями моделируемой системы. Фиксируя один из способов, пришлось бы существенно сузить класс исследуемых систем. Поэтому и рассматриваются уже «агрегированные» модели, имея в виду, что способ агрегирования при необходимости может быть найден.

По аналогичным причинам предполагается, что элемент нижнего уровня имеет точную информацию о реализовавшемся значении неопределенного фактора. В противном случае пришлось бы явно описывать отношение этого элемента к неопределенности. Если такое описание зафиксировать, то задача без больших проблем сводится к рассмотренной. Но, к сожалению, единого способа описания не существует. Таким образом, рассматриваемые ниже модели следует рассматривать как субъективное описание конфликта, относящееся к элементу верхнего уровня. В частности, поэтому и нельзя считать, что второй игрок осторожен по отношению к имеющейся неопределенности (подробности см. в [3]).

Основным принципом оптимальности в данной работе является принцип максимального гарантированного результата (как обычно предполагается, что исследование ведется с позиций элемента верхнего уровня). При этом используется определение, предложенное в [9]. Неоднократно (см., например, [6,7,9]) доказывалось, что при выполнении определенных условий это определение эквивалентно классическому определению из [4]. Поскольку здесь такого рода дополнительных условий не накладывается, новое определение оказывается намного удобнее традиционного. Найти условия, при которых эти определения эквивалентны и для рассматриваемых ниже моделей несложно, но поскольку таких моделей довольно много, соответствующие доказательства были бы слишком утомительны.

1 Базовая модель

Будем рассматривать игры следующего вида: $\Gamma = \langle U, V, A, g, h \rangle$. Здесь U, V, A – множества, g – функция, отображающая декартово произведение $U \times V$ в множество действительных чисел $\mathbf{R}$, а h – функция, отображающая $U \times V \times A$ в $\mathbf{R}$.

Интерпретировать эти конструкции можно следующим образом. В игре принимают участие два игрока. Будем называть их первым и вторым. Тогда U – множество стратегий первого игрока, V –

множество стратегий второго. Множество A – это множество значений неопределенного фактора, выбор которого не подконтролен игрокам, но от которого зависит выигрыш второго игрока. Соответственно g и h – функции выигрыша первого и второго игроков. Такое название предполагает, что цели игроков описываются стремлением к максимизации значений своих функций выигрыша.

Будем предполагать, что события развиваются следующим образом. Сначала первый игрок выбирает свою стратегию $u \in U$ и сообщает его партнеру. Затем реализуется некоторое значение неопределенного фактора $\alpha \in A$ и это значение тоже становится известным второму игроку. После чего второй игрок выбирает свое управление $v \in V$, и игроки получают свои выигрыши $g(u,v)$ и $h(u,v,\alpha)$ соответственно. Тогда можно определить максимальный гарантированный результат первого игрока следующим образом.

Определение 1. Число γ называется гарантированным результатом первого игрока в игре Г, если существует стратегия $u \in U$ и для любого $\alpha \in A$ найдется $\lambda \in \mathbf{R}$, такое, что выполняются следующие условия:

1. существует стратегия $w \in V$, для которой $h(u,w,\alpha) \geq \lambda$;
2. для любой стратегии $v \in V$ либо $g(u,v) \geq \gamma$, либо $h(u,v,\alpha) < \lambda$.

Точная верхняя грань $R(\Gamma)$ гарантированных результатов называется максимальным гарантированным результатом первого игрока, а про стратегию $u \in U$, для которой выполняются эти условия, будем говорить, что она гарантирует получение результата γ.

Содержательный смысл этого определения таков. При сделанных выше предположениях у второго игрока нет неопределенности в момент принятия решения. Поэтому для него все выборы разбиваются на два класса: рациональные и нерациональные. Для рациональных выполняется неравенство $h(u,w,\alpha) \geq \lambda$, а для нерациональных – противоположное неравенство $h(u,v,\alpha) < \lambda$. Стратегия $u \in U$ гарантирует первому игроку получение результата γ, если при любом значении $\alpha \in A$ и любом рациональном выборе партнера он получит выигрыш, не меньший γ.

В дальнейшем будут рассматриваться различные расширения игры Г, имеющие точно такую же структуру. Относительно самой игры Г сделаем следующие стандартные предположения. Множества U и V будем считать наделенными топологиями и компактными. Функцию g будем считать непрерывной в топологии декартова произведения $U \times V$. Функцию h будем считать непрерывной на $U \times V \times A$. Для расширений игры Г эти предположения могут и не выполняться.

При выполнении этих предположений можно вычислить максимальный гарантированный результат $R(\Gamma)$ явно.

Теорема 1. Пусть

$$BR(u,\alpha) = \left\{ v \in V : h(u,v,\alpha) = \max_{w \in V} h(u,w,\alpha) \right\}.$$

Тогда справедливо равенство

$$R(\Gamma) = \sup_{u \in U} \min_{\alpha \in A} \min_{v \in BR(u,\alpha)} g(u,v). \qquad (1)$$

Доказательство. При выполнении сформулированных условий можно, не ограничивая общности, считать, что стратегия w из первого пункта определения 1 принадлежит множеству $BR(u,\alpha)$: если неравенство $h(u,w,\alpha) \geq \lambda$ выполняется для какого-то w, то оно тем более выполняется для $w \in BR(u,\alpha)$. Опять же, не умаляя общности, можно считать, что $\lambda = h(u,w,\alpha)$: первый пункт определения 1 при таком выборе λ заведомо выполняется, а второй выполнить тем проще, чем больше значение λ. Неравенство $h(u,v,\alpha) < \lambda$ для $v \in BR(u,\alpha)$ заведомо не справедливо. Поэтому число γ является гарантированным результатом тогда и только тогда, когда найдется такая стратегия $u \in U$, что для любого $\alpha \in A$ и любого $v \in BR(u,\alpha)$ имеет место неравенство $g(u,v) \geq \gamma$.

Отсюда немедленно следует, что максимальный гарантированный результат – это точная верхняя грань чисел γ, для которых выполняется неравенство

$$\gamma \leq \sup_{u \in U} \min_{\alpha \in A} \min_{v \in BR(u,\alpha)} g(u,v).$$

Утверждение теоремы следует из этого неравенства непосредственно.

Замечание 1. При выполнении сформулированных выше топологических предположений формулу (1) можно считать определением максимального гарантированного результата, как это делал Ю.Б. Гермейер [4]. Для рассматриваемых далее расширений игры Г определение 1 удобнее.

Замечание 2. Давно известно, что даже при выполнении условий о непрерывности и компактности верхняя грань в формуле (1) может не достигаться. По этой причине максимальный гарантированный результат, вообще говоря, не является гарантированным результатом. В этом смысле используемая терминология не совсем удачна, но она традиционна.

2 Игра с информированным первым игроком

Рассмотрим теперь случай, когда в первый игрок в момент принятия решений тоже имеет информацию о реализовавшемся значении неопределенного фактора α. На первый взгляд, это противоречит предположениям, сформулированным перед определением 1. Данная трудность снимается следующим стандартным приемом.

Используем следующее обозначение: $\Phi(X,Y)$ будет обозначать класс всех функций, отображающих множество X в множество Y.

Рассмотрим игру $\Gamma_{@} = \langle U_{@}, V, A, g_{@}, h_{@} \rangle$ в которой $U_{@} = \Phi(A,U)$, а функции выигрыша определяются условиями $g_{@}(u_{@},v) = g(u_{@}(\alpha),v)$ и $h_{@}(u_{@},v,\alpha) = h(u_{@}(\alpha),v,\alpha)$.

Интерпретировать эти конструкции можно следующим образом. Первый игрок, не зная о реализовавшемся значении α, фиксирует правило, в соответствии с которым он будет выбирать свое управление в зависимости от действительного значения неопределенного фактора. Потом реализуется значение α и, следовательно, может быть найдено управление $u_{@}(\alpha)$. Наконец, зная α и управление $u_{@}(\alpha)$ свою стратегию выбирает второй игрок.

Игра $\Gamma_{@}$ имеет ту же структуру, что и игра Γ, поэтому можно пользоваться определением 1. А конструктивную формулу для максимального гарантированного результата $R(\Gamma_{@})$ дает следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть

$$BR(u_{@},\alpha) = \left\{ v \in V : h(u_{@}(\alpha),v,\alpha) = \max_{w\in V} h(u_{@}(\alpha),w,\alpha) \right\}.$$

Тогда справедливо равенство

$$R(\Gamma) = \min_{\alpha\in A} \sup_{u\in U} \min_{v\in BR(u,\alpha)} g\left(u,v\right).$$

Доказательство. Дословно повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1, придем к формуле

$$R(\Gamma_{@}) = \sup_{u_{@}\in\Phi(A,U)} \min_{\alpha\in A} \min_{v\in BR(u_{@},\alpha)} g\left(u_{@}(\alpha),v\right).$$

Остается поменять местами операторы sup и min, воспользовавшись известным результатом (см., например, [10], стр. 36). Теорема доказана.

Разумеется, $R(\Gamma_{@}) \geq R(\Gamma)$. Возможен и случай $R(\Gamma_{@}) > R(\Gamma)$ (примеры строятся без труда).

3 Децентрализация управления

Рассмотрим еще одну игру с той же логической структурой. Пусть $\Gamma_{\Diamond} = \langle U_{\Diamond}, V_{\Diamond}, A, g_{\Diamond}, h_{\Diamond} \rangle$, где $U_\Diamond = \Phi(U,U)$, $V_\Diamond = V \times U$, $g_\Diamond(u_\Diamond,v_\Diamond) = g(u_\Diamond(\omega),v)$, $h_\Diamond(u_\Diamond,v_\Diamond,\alpha) = h(u_\Diamond(\omega),v,\alpha)$, а $v_\Diamond = (v,\omega)$.

Трактовать эти конструкции можно следующим образом. Все предположения, сформулированные перед определением 1, выполнены. Но вдобавок перед выбором первым игроком своего управления его партнер имеет возможность сообщить о наиболее желательном для него выборе управления первого игрока. В зависимости от этого сообщения и принимает решение первый игрок. Разумеется, он не обязан слепо следовать указаниям партнера, но как показывает следующее утверждение, в целом это выгодно.

Лемма 1. Пусть γ – гарантированный результат в игре $\Gamma_\Diamond$. Тогда среди стратегий, гарантирующих получение такого результата, найдется стратегия $u_\Diamond$ следующего специального вида: существует такое множество W, что

- для любого $\omega \in U$ выполняется включение $u_\Diamond(\omega) \in W$;
- для любого $\omega \in W$ справедливо равенство $u_\Diamond(\omega) = \omega$.

Доказательство. Допустим, стратегия $u_{\Diamond}^{0}$ гарантирует первому игроку получение выигрыша γ. Пусть W – множество значений функции $u_{\Diamond}^{0}$. Рассмотрим стратегию $u_\Diamond(\omega)$, удовлетворяющую условию леммы именно с этим множеством W.

Фиксируем произвольное α ∈ A и для стратегии $u_\Diamond^0$ и этого α выберем число λ и стратегию $w_\Diamond^0 = (v^0, \omega^0) \in V_\Diamond$, для которых выполняются оба пункта определения 1. Положим $w_\Diamond = (v^0, u_\Diamond^0(\omega^0))$. Тогда $h_\Diamond(u_\Diamond, w_\Diamond, \alpha) = h(u_\Diamond(u_\Diamond^0(\omega^0)), v^0, \alpha) = h(u_\Diamond^0(\omega^0), v^0, \alpha) \ge \lambda.$ Если же v◊ = (v,ω) – произвольная стратегия, то найдется ω0, для которого $u_\Diamond^0(\omega^0) = u_\Diamond(\omega)$ и тогда для стратегии $v_\Diamond^0 = (v, \omega^0)$ либо $g_\Diamond(u_\Diamond, v_\Diamond) = g(u_\Diamond(\omega), v) = g(u_\Diamond^0(\omega^0), v) = g_\Diamond(u_\Diamond^0, v_\Diamond^0) \ge \gamma,$ либо $h_\Diamond(u_\Diamond, v_\Diamond, \alpha) = h(u_\Diamond(\omega), v, \alpha) = h(u_\Diamond^0(\omega^0), v, \alpha) =$ $= h_\Diamond(u_\Diamond^0, v_\Diamond^0, \alpha) < \lambda.$

Таким образом, по определению стратегия u◊ гарантирует получение результата γ, что и доказывает лемму.

Интерпретировать использованные конструкции можно следующим образом. Первый игрок выбирает множество W и предоставляет право выбора своего управления в пределах этого множества второму игроку. Тем самым, по сути, происходит децентрализация управления. Это можно описать и напрямую [6], но тогда в таком случае приходится работать с играми со связанными переменными, что не всегда удобно. Лемма 1 показывает, что построенная игра Г◊ может достаточно адекватно описывать процесс децентрализации.

Лемма 1 утверждает, что среди оптимальных стратегий первого игрока существуют такие, что первый игрок точно выполняет пожелания второго. На практике это, вероятно, упрощает взаимодействие игроков.

Разумеется, выполняется неравенство R(Г) ≤ R(Г◊).

Действительно, для любого управления u ∈ U можно выбрать такую стратегию u◊ ∈ U◊, что u◊(ω) ≡ u. При таком выборе для любых v ∈ V, ω ∈ U и α ∈ A будут выполняться равенства g◊(u◊,(v,ω)) = g(u,v) и h◊(u◊,(v,ω),α) = g(u,v,α). Тогда непосредственно из определения 1 будет следовать, что если стратегия u гарантирует первому игроку в игре Г получение выигрыша γ, то соответствующая стратегия u◊ гарантирует ему получение выигрыша γ уже в игре Г◊. Отсюда немедленно следует неравенство R(Г) ≤ R(Г◊).

Этот вывод вполне ожидаем, а приведенный набросок доказательства объясняет причину выполнения неравенства: дополнительная информация, пусть даже недостоверная, не может нанести вреда, поскольку ее можно попросту проигнорировать.

Существуют игры, для которых выполняется строгое неравенство R(Г) < R(Г◊).

Пример 1. Положим U = V =A = {–1,1}, g(u,v) = – (u – v)2, h(u,v,α) = 2(v – α)2 – (u – v)2.

Понятно, что в игре Г при любом выборе u первого игрока второму игроку выгодно выбирать v = – α. Поэтому, если реализуется значение α = – u, то первый игрок получит выигрыш – 4. Это и есть максимальный гарантированный результат первого игрока (он же глобальный минимум его выигрыша).

А если в игре Г◊ первый игрок выберет стратегию u◊(ω) = ω, то выбрав стратегию (– α, – α) второй игрок обеспечит и себе и партнеру получение глобальных максимумов своих выигрышей. Значит, максимальный гарантированный результат в этой игре равен 0.

Таким образом, в данном примере неравенство R(Г) < R(Г◊) имеет место.

Также существуют и игры, для которых R(Г) = R(Г◊).

Пример 2. Положим U = V =A = {–1,1}, g(u,v) = – (u – v)2, h(u,v,α) = 2(v – α)2 + (u – v)2.

Так же, как в предыдущем примере показывается, что R(Г) = – 4.

Из тех же рассуждений следует, что стратегии u◊(ω) ≡ 1 и u◊(ω) ≡ – 1 не могут гарантировать первому игроку получение большего выигрыша. Остается рассмотреть стратегию u◊(ω) = ω (стратегию u◊(ω) = – ω можно не рассматривать в силу леммы 1). Но если стратегия u◊(ω) = ω зафиксирована, то выбрав v◊ = (– α,α) второй игрок получит максимальный возможный выигрыш, а первый вновь получит лишь – 4.

Следовательно, в данной игре R(Г) = R(Г◊).

Сравнение этих двух примеров показывает, что если второй игрок «заинтересован» в увеличении выигрыша партнера, то использование дополнительной информации целесообразно. В противном случае максимальный гарантированный выигрыш позволяют получить и стратегии, для которых множество W состоит из одной точки. Иными словами, децентрализация управления целесообразна лишь в том случае, когда интересы игроков «хорошо согласованы». Впрочем, слова, взятые в кавычки, точного смысла не имеют.

Гораздо интереснее сравнить результаты в играх Г◊ и Г@.

Лемма 2. Для любой игры Г справедливо неравенство $R(\Gamma\lozenge) \le R(\Gamma@)$.

Доказательство. Пусть γ – произвольный гарантированный результат в игре $\Gamma\lozenge$. Тогда по определению можно выбрать стратегию $u\lozenge \in \Phi(U,U)$ так, что для любого $\alpha \in A$ найдется $\lambda(\alpha) \in R$, для которого существует такая стратегия $(w(\alpha),\omega(\alpha)) \in V \times U$, что $h(u\lozenge(\omega(\alpha)),w(\alpha),\alpha) \ge \lambda(\alpha)$ и для любой стратегии $(v,\varpi) \in V$ либо $g(u\lozenge(\varpi),v) \ge \gamma$, либо $h(u\lozenge(\varpi),v,\alpha) < \lambda(\alpha)$ и в частности для любого $v \in V$ либо $g(u\lozenge(\omega(\alpha)),v) \ge \gamma$, либо $h(u\lozenge(\omega(\alpha)),v,\alpha) < \lambda(\alpha)$.

Положим $u@(\alpha) = u\lozenge(\omega(\alpha))$. Функцию $u@ \in \Phi(A,U)$ можно рассматривать как стратегию в игре $\Gamma@$. Покажем, что эта стратегия гарантирует первому игроку получение выигрыша γ.

Фиксируем любое α. Тогда для $\lambda = \lambda(\alpha)$, во-первых, $h(u@(\alpha),w(\alpha),\alpha) = h(u\lozenge(\omega(\alpha)),w(\alpha),\alpha) \ge \lambda$. А во-вторых, для любого $v \in V$ либо $g(u@(\alpha),v) = g(u\lozenge(\omega(\alpha)),v) \ge \gamma$, либо $h(u@(\alpha),v,\alpha) = h(u\lozenge(\omega(\alpha)),v,\alpha) < \lambda$. Следовательно, по определению γ – гарантированный результат в игре $\Gamma@$.

В силу произвольности γ отсюда получается нужное неравенство. Лемма доказана.

Если игра Г такова, как в примере 1, то, как показано выше, $R(\Gamma\lozenge) = 0$. Очевидно, что в игре $\Gamma@$ положительного выигрыша получить невозможно, поэтому в данном случае $R(\Gamma\lozenge) = R(\Gamma@)$.

Если же рассмотреть игру Г из примера 2, то непосредственно проверяется, что единственным рациональным ответом второго игрока на стратегию $u@(\alpha) = -\alpha$ в игре $\Gamma@$ будет $v = -\alpha$ и потому $R(\Gamma@) = 0$. А, как установлено выше, $R(\Gamma\lozenge) = -4$. Поэтому для этого случая $R(\Gamma\lozenge) < R(\Gamma@)$.

Таким образом, усилить утверждение леммы 2 нельзя.

4 О целесообразности децентрализации в условиях одинаковой информированности игроков

Рассмотрим расширение $(\Gamma_@)_\lozenge$ игры $\Gamma_@$, построенное по схеме из раздела 3.

Содержательно это означает следующее. Первый игрок получает информацию о реализовавшемся значении неопределенного фактора. А, кроме того, второй игрок сообщает ему о желательном для себя выборе управления *u*. На основе этой информации первый игрок и делает свой выбор.

Формально $\Gamma_{@\lozenge} = \langle U_{@\lozenge}, V_{@\lozenge}, A, g_{@\lozenge}, h_{@\lozenge} \rangle$, где $U_{@\lozenge} = \Phi(\Phi(A,U),\Phi(A,U))$, $V_{@\lozenge} = V \times \Phi(A,U)$, а функции выигрыша определяются условиями

$$g_{@\lozenge}(u_{@\lozenge},v_{@\lozenge}) = g_@(u_@(\varphi),v) = g(u_@(\varphi)(\alpha),v),\ h_{@\lozenge}(u_{@\lozenge},v_{@\lozenge},\alpha) = h_@(u_@(\varphi),v,\alpha) = g(u_@(\varphi)(\alpha),v,\alpha),$$

где $(v_@)_\lozenge = (v,\varphi)$, $v \in V$, $\varphi \in \Phi(A,U)$ (запись вида $u_@(\varphi)(\alpha)$ не должна вводить в заблуждение: значение $u_@(\varphi)$ функции $u_@$ в точке φ – это функция, отображающая A в U, а $u_@(\varphi)(\alpha)$ – ее значение в точке α).

Из результатов предыдущего раздела следует, что $R(\Gamma_@) \le R(\Gamma_{@\lozenge})$. Но на самом деле имеет место следующий результат.

Теорема 3. Справедливо равенство $R(\Gamma_@) = R(\Gamma_{@\lozenge})$.

Доказательство. Ввиду сказанного, достаточно доказать неравенство $R(\Gamma_@) \ge R(\Gamma_{@\lozenge})$.

Пусть γ – произвольный гарантированный результат в игре $\Gamma_{@\lozenge}$. Фиксируем какую-нибудь стратегию $u_{@\lozenge}$, гарантирующую получение такого результата, и любое $\alpha \in A$. Тогда найдутся число λ_α и стратегия $w_{@\lozenge} = (w_\alpha,\psi_\alpha)$, для которых, во-первых, $h_{@\lozenge}(u_{@\lozenge},w_{@\lozenge},\alpha) \ge \lambda_\alpha$, и, во-вторых, для любой стратегии $v_{@\lozenge}$ либо $g_{@\lozenge}(u_{@\lozenge},v_{@\lozenge}) \ge \gamma$, либо $h_{@\lozenge}(u_{@\lozenge},v_{@\lozenge},\alpha) < \lambda_\alpha$.

Положим, $u_@(\alpha) = u_{@\lozenge}(\psi_\alpha)(\alpha)$. Так определенную функцию $u_@$ можно считать стратегией в игре $\Gamma_@$.

Для этой стратегии имеем, во-первых,

$$h_@(u_@,w_\alpha,\alpha) = h(u_@(\alpha),w_\alpha,\alpha) = h(u_{@\lozenge}(\psi_\alpha)(\alpha),w_\alpha,\alpha) = h_{@\lozenge}(u_{@\lozenge},w_{@\lozenge},\alpha) \ge \lambda_\alpha.$$

А, во-вторых, для любой стратегии $v \in V_@ = V$ можно положить $v_{@\lozenge} = (v,\psi_\alpha)$ и тогда будем иметь либо

$$g_@(u_@,v) = g(u_@(\alpha),v) = g(u_{@\lozenge}(\psi_\alpha)(\alpha),v) = h_{@\lozenge}(u_{@\lozenge},v_{@\lozenge}) \ge \gamma,$$

либо

$$h_@(u_@,v,\alpha) = h(u_@(\alpha),v,\alpha) = h(u_{@\lozenge}(\psi_\alpha)(\alpha),v,\alpha) = h_{@\lozenge}(u_{@\lozenge},v_{@\lozenge},\alpha) < \lambda_\alpha.$$

Следовательно, по определению построенная стратегия $u_@$ гарантирует первому игроку получение выигрыша γ в игре $\Gamma_@$.

Значит, $R(\Gamma_@) \ge \gamma$, а в силу произвольности γ и $R(\Gamma_@) \ge R(\Gamma_{@\lozenge})$. Это доказывает теорему.

Отсюда получается первый качественный вывод. Если первый игрок не имеет информации о действительном значении внешнего неопределенного фактора, то децентрализация может быть полезной. Если же первый игрок имеет такую же информацию о внешней среде, как и его партнер, то для первого децентрализация не приносит никакой дополнительной выгоды.

Попробуем придать этому выводу количественный характер.

5 Игры с ограниченным объемом информации о неопределенном факторе

До сих пор рассматривались два случая: либо первый игрок вовсе не имел информации о реализовавшемся значении неопределенного фактора, либо он имел точную и достоверную информацию об этом значении. Рассмотрим промежуточный случай. Будем считать, что первый игрок может получить достоверную информацию о неопределенном факторе, но ее объем ограничен, скажем, n битами. В таком случае информация может быть закодирована словами длины n в алфавите {0,1}. Разумеется, «содержание» информации в таком случае будет зависеть от способа кодировки. В подобных случаях принято считать, что кодировка производится оптимальным для первого игрока способом. Ну а тогда можно исходить из того, что способ кодировки выбирает сам первый игрок. Формализуется сказанное следующим образом.

Рассмотрим игру $\Gamma_{@n} = \langle U_{@n}, V, A, g_{@n}, h_{@n}\rangle$ в которой $U_{@n} = \Phi(N,U) \times \Phi(A,N)$, $N = \{0,1\}^n$ – множество слов длины n, а функции выигрыша определяются равенствами $g_{@n}(u_{@n},v) = g(u_+(P(\alpha)),v)$ и $h_{@n}(u_{@n},v,\alpha) = h(u_+(P(\alpha)),v,\alpha)$, где $u_{@n} = (u_+,P)$, $u_+ \in \Phi(N,U)$, $P \in \Phi(A,N)$.

Интерпретируются эти конструкции следующим образом. Отображение P задает способ кодировки информации о неопределенном факторе. Функция u_+ описывает правило выбора управления u на основе полученной первым игроком информации об этом факторе. Если реализуется значение неопределенного фактора α, то первый игрок получит «сообщение», закодированное словом $P(\alpha)$ и выберет управление $u_+(P(\alpha))$, а выигрыши игроков зависят только от «физических» управлений $u_+(P(\alpha))$ и v и неопределенного фактора, и не зависят от того какая информация и как обрабатывалась в процессе принятия решений.

Несложно доказать, что величина $R(\Gamma_{@n})$ не убывает с ростом n и

$$R(\Gamma_{@n}) = \sup_{(u^0,u^1,\ldots,u^{m-1})\in U^m} \min_{\alpha\in A} \max_{0\le i\le m-1} \min_{v\in BR(u^i,\alpha)} g\left(u^i,v\right),$$

где $m = 2^n$. Без большого труда можно построить примеры, в которых величина $R(\Gamma_{@n})$ строго возрастает с ростом n. В более общей ситуации эти факты установлены в [7].

Посмотрим, что дает децентрализация в играх типа $\Gamma_{@n}$. Рассмотрим игру $\Gamma_{@n\Diamond} = (\Gamma_{@n})_\Diamond$. Пусть $\Gamma_{@n\Diamond} = \langle U_{@n\Diamond}, V_{@n\Diamond}, A, g_{@n\Diamond}, h_{@n\Diamond}\rangle$. По определению в ней $U_{@n\Diamond} = \Phi(\Phi(N,U) \times \Phi(A,N), \Phi(N,U) \times \Phi(A,N))$, $V_{@n\Diamond} = V \times (\Phi(N,U) \times \Phi(A,N))$, а функции выигрыша определяются условиями

$$g_{@n\Diamond}(u_{@n\Diamond},v_{@n\Diamond}) = g_{@n}(u_{@n\Diamond}(\omega_{@n}),v) = g(u_+(P(\alpha)),v)$$

и

$$h_{@n\Diamond}(u_{@n\Diamond},v_{@n\Diamond},\alpha) = h_{@n}(u_{@n\Diamond}(\omega_{@n}),v,\alpha) = h(u_+(P(\alpha)),v,\alpha),$$

где $v_{@n\Diamond} = (v, \omega_{@n})$, $u_{@n\Diamond}(\omega_{@n}) = (u_+,P)$.

Остановимся на интерпретации этих конструкций. Начнем со стратегии второго игрока. Как и прежде, он выбирает «свое» управление $v \in V$. Но вдобавок он выбирает наилучший с его точки зрения способ $\omega_{@n}$ использования первым игроком информации о внешнем факторе, состоящий из способа кодировки этой информации двоичными словами длины n и метода выбора управления в зависимости от такого слова. Об этом способе $\omega_{@n}$ он сообщает партнеру, а тот вправе согласиться с таким выбором, или выбрать свой собственный способ (u_+,P). В соответствии с этим выбором обрабатывается информация о внешнем неопределенном факторе и выбирается управление $u_+(P(\alpha)) \in U$. А выигрыши игроков зависят только от «физических» управлений $u_+(P(\alpha))$ и v.

Получились довольно громоздкие конструкции. Не в последнюю очередь это происходит из-за того, что игра $\Gamma_{@n\Diamond}$ моделирует два последовательных процесса обмена информацией: сначала первый игрок получает агрегированную информацию о неопределенном факторе, а потом – информацию о желаемом для второго игрока выборе стратегии. На содержательном уровне понятно, что ничего не изменится, если рассмотреть другую схему обмена информацией: первый игрок одновременно получает информацию о неопределенном факторе и преференциях партнера, а затем уж принимает свое решение. Формально эта схема описывается следующей моделью.

Рассмотрим игру $\Gamma_{@n+\Diamond} = \langle U_{@n\Diamond}, V_{@n+\Diamond}, A, g_{@n+\Diamond}, h_{@n+\Diamond}\rangle$ со следующей структурой: $U_{@n+\Diamond} = \Phi(N \times U, U) \times \Phi(A,N)$, $V_{@n+\Diamond} = V \times U$, а функции выигрыша определяются равенствами $g_{@n+\Diamond}(u_{@n+\Diamond},v_{@n+\Diamond}) = g(u_{@n+\Diamond}(P(\alpha),\omega),v)$ и $h_{@n+\Diamond}(u_{@n+\Diamond},v_{@n+\Diamond},\alpha) = h(u_{@n+\Diamond}(P(\alpha),\omega),v,\alpha)$, где $v_{@n+\Diamond} = (v,\omega)$, $v \in V$, $\omega \in U$.

Интерпретация в данном случае заметно проще. Второй игрок выбирает «свое» управление $v \in V$ и сообщение о том, какое «физическое» управление первого игрока для него наиболее предпочтительно. Первый игрок выбирает способ кодировки информации о неопределенном факторе P и способ выбора «своего» управления в зависимости от полученной закодированной информации о неопределенном факторе и от сообщения о наиболее выгодном управлении, полученном от партнера. Как и всегда, выигрыши игроков зависят лишь от выбранных ими «физических» управлений и не зависят от той информации, которой они обменивались.

Игры $\Gamma_{@n\Diamond}$ и $\Gamma_{@n+\Diamond}$, вообще говоря, не изоморфны. Показать это можно чисто комбинаторными рассуждениями: если множества U, V и A конечны и каждое из них содержит больше одного элемента, то множества $V_{@n\Diamond}$ и $V_{@n+\Diamond}$ тоже конечны, но мощность множества $V_{@n+\Diamond}$ строго больше множества $V_{@n\Diamond}$ (подсчеты этих мощностей не сложны). Тем не менее, содержательный вывод, сформулированный двумя абзацами выше верен, поскольку справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. Имеет место равенство $R(\Gamma_{@n\Diamond}) = R(\Gamma_{@n+\Diamond})$.

Доказательство. Сначала докажем неравенство $R(\Gamma_{@n\Diamond}) \geq R(\Gamma_{@n+\Diamond})$. Пусть γ – произвольный гарантированный результат в игре $\Gamma_{@n+\Diamond}$ и $u_{@n+\Diamond}$ – какая-то стратегия, гарантирующая получение этого результата.

Определим стратегию $u_{@n\Diamond}$ следующим образом. Пусть $u_{@n+\Diamond} = (u_{\&},P)$, где $u_{\&} \in \Phi(N \times U,U)$, а $P \in \Phi(A,N)$. Обозначим $\Psi = \{u_{+} \in \Phi(N,U) \mid \exists \omega \in U\colon \forall s \in N\ \ u_{+}(s) = u_{\&}(s,\omega)\}$. Определим отображение $u_{@n\Diamond} \in \Phi(\Phi(N,U) \times \Phi(A,N),\Phi(N,U) \times \Phi(A,N))$ условиями:

- для любых $\omega_{+} \in \Phi(N,U)$ и $Q \in \Phi(A,N)$ выполняется включение $u_{@n\Diamond}(\omega_{+},Q) \in \Psi \times \{P\}$;
- если $\omega_{+} \in \Psi$, то $u_{@n\Diamond}(\omega_{+},P) = (\omega_{+},P)$

(таких отображений много; выберем одно из них).

Фиксируем произвольное $\alpha \in A$ и число λ, для которого выполняются условия: найдется $w_{@n+\Diamond}$, для которого $h_{@n+\Diamond}(u_{@n+\Diamond},w_{@n+\Diamond},\alpha) \geq \lambda$, и для любого $v_{@n+\Diamond}$ либо $g_{@n+\Diamond}(u_{@n+\Diamond},v_{@n+\Diamond}) \geq \gamma$, либо $h_{@n+\Diamond}(u_{@n+\Diamond},v_{@n+\Diamond},\alpha) < \lambda$ (такие λ и $w_{@n+\Diamond}$ существуют в силу определения 1, поскольку γ – гарантированный результат в игре $\Gamma_{@n+\Diamond}$).

Пусть $w_{@n+\Diamond} = (w,\omega)$, $v \in V$, $\omega \in U$. Положим $w_{@n\Diamond} = (w,\omega_{+},P)$, где ω_{+} – функция, определенная условием $\omega_{+}(s) = u_{\&}(s,\omega)$ для всех $s \in N$. Тогда $\omega_{+} \in \Psi$. Поэтому $u_{@n\Diamond}(\omega_{+},P) = (\omega_{+},P)$ и, следовательно, $h_{@n\Diamond}(u_{@n\Diamond},w_{@n\Diamond},\alpha) = h_{@n}((\omega_{+},P),w,\alpha) = h(\omega_{+}(P(\alpha)),w,\alpha) = h(u_{\&}(P(\alpha),\omega),w,\alpha) = h_{@n+\Diamond}(u_{@n+\Diamond},w_{@n+\Diamond},\alpha) \geq \lambda$.

Пусть теперь $v_{@n\Diamond} = (v,\varpi_{+},Q)$ – произвольная стратегия второго игрока в игре $\Gamma_{@n\Diamond}$. Положим $u_{@n\Diamond}(\varpi_{+},Q) = (\omega_{+},P)$ и $w_{@n\Diamond} = (v,\omega_{+},P)$. Тогда в силу выбора стратегии $u_{@n\Diamond}$ имеем $g_{@n\Diamond}(u_{@n\Diamond},v_{@n\Diamond}) = g_{@n\Diamond}(u_{@n\Diamond},w_{@n\Diamond}) = g(\omega_{+}(P(\alpha)),v)$ и $h_{@n\Diamond}(u_{@n\Diamond},v_{@n\Diamond},\alpha) = h_{@n\Diamond}(u_{@n\Diamond},w_{@n\Diamond},\alpha) = h(\omega_{+}(P(\alpha)),v,\alpha)$.

Кроме того, $\omega_{+} \in \Psi$. Значит, существует $\omega \in U$, для которого $\omega_{+}(s) \equiv u_{\&}(s,\omega)$. Обозначим $v_{@n+\Diamond} = (v,\omega)$. При таком выборе $g(\omega_{+}(P(\alpha)),v) = g(\omega_{\&}(P(\alpha),\omega),v) = g_{@n\Diamond}(u_{@n\Diamond},v_{@n\Diamond})$ и $h(\omega_{+}(P(\alpha)),v,\alpha) = g(\omega_{\&}(P(\alpha),\omega),v) = h_{@n\Diamond}(u_{@n\Diamond},v_{@n\Diamond},\alpha)$.

Итак, $g_{@n\Diamond}(u_{@n\Diamond},v_{@n\Diamond}) = g_{@n+\Diamond}(u_{@n+\Diamond},v_{@n+\Diamond})$ и $h_{@n\Diamond}(u_{@n\Diamond},v_{@n\Diamond},\alpha) = h_{@n+\Diamond}(u_{@n+\Diamond},v_{@n+\Diamond},\alpha)$. А поскольку одно из неравенств $g_{@n+\Diamond}(u_{@n+\Diamond},v_{@n+\Diamond}) \geq \gamma$ или $h_{@n+\Diamond}(u_{@n+\Diamond},v_{@n+\Diamond},\alpha) < \lambda$ выполняется для любой стратегии $v_{@n+\Diamond}$ (а значит и для только что построенной), одно из неравенств $g_{@n\Diamond}(u_{@n\Diamond},w_{@n\Diamond}) \geq \gamma$ или $h_{@n\Diamond}(u_{@n\Diamond},v_{@n\Diamond},\alpha) < \lambda$ выполнено при произвольной $v_{@n\Diamond}$.

Таким образом, γ – гарантированный результат в игре $\Gamma_{@n\Diamond}$. Следовательно, $R(\Gamma_{@n\Diamond}) \geq \gamma$. А в силу произвольности γ получим $R(\Gamma_{@n\Diamond}) \geq R(\Gamma_{@n+\Diamond})$

Докажем обратное неравенство $R(\Gamma_{@n+\Diamond}) \geq R(\Gamma_{@n\Diamond})$. Фиксируем произвольный гарантированный результат γ и обеспечивающую получение этого результата стратегию $u_{@n\Diamond}$ в игре $\Gamma_{@n\Diamond}$.

Тогда по определению для любого $\alpha \in A$ существуют число λ^{α} и стратегия $w^{\alpha}_{@n\Diamond} = (w^{\alpha},\omega^{\alpha}_{+},Q^{\alpha})$ такие, что $h_{@n\Diamond}(u_{@n\Diamond},w^{\alpha}_{@n\Diamond},\alpha) \geq \lambda^{\alpha}$ и для любой стратегии $v_{@n\Diamond}$ выполняется одно из неравенств $g_{@n\Diamond}(u_{@n\Diamond},v_{@n\Diamond}) \geq \gamma$ или $h_{@n\Diamond}(u_{@n\Diamond},v_{@n\Diamond},\alpha) < \lambda^{\alpha}$. Фиксируем такие числа λ^{α} и по одной такой стратегии $w^{\alpha}_{@n\Diamond} = (w^{\alpha},\omega^{\alpha}_{+},P^{\alpha})$ для каждого α.

Определим стратегию $u_{@n+\Diamond} = (u_{\&},P)$ в игре $\Gamma_{@n+\Diamond}$ следующими условиями. Положим $(u^{\alpha}_{+},P^{\alpha}) = u_{@n\Diamond}(\omega^{\alpha}_{+},Q^{\alpha})$. Пусть $P(\alpha) = P^{\alpha}(\alpha)$ для любого $\alpha \in A$. Далее, для $s \in N$ определим множество W^{s} всех таких элементов u^{α}, для которых $u^{\alpha}_{+}(P(\alpha)) = u^{\alpha}$ и соответствующее значение $P^{\alpha}(\alpha) = s$. Наконец, выберем любую функцию $u_{\&}$, удовлетворяющую условиям

- для любого $\omega \in U$ выполняется включение $u_{\&}(s,\omega) \in W^{s}$;

- для любого $\omega \in W^s$ справедливо равенство $u_{\&}(s,\omega) = \omega$.

Покажем, что так построенная стратегия $u_{@n+\Diamond} = (u_{\&},P)$ гарантирует первому игроку получение выигрыша γ в игре $\Gamma_{@n+\Diamond}$.

Фиксируем произвольное $\alpha \in A$. Положим $\lambda = \lambda^\alpha$ и $w_{@n+\Diamond} = (w,\omega)$, где $w = w^\alpha$ и $\omega = u_+^\alpha(P(\alpha))$.

Тогда $\omega \in W^{P(\alpha)}$ и потому $h_{@n+\Diamond}(u_{@n+\Diamond},w_{@n+\Diamond},\alpha) = h(u_{\&}(P(\alpha),\omega),w,\alpha) = h(\omega,w,\alpha) = h(u_+^\alpha(P(\alpha)),w,\alpha) =$ $= h(u_+^\alpha(P^\alpha(\alpha)),w^\alpha,\alpha) = h_{@n\Diamond}(u_{@n\Diamond},w_{@n\Diamond}^\alpha,\alpha) \geq \lambda^\alpha = \lambda$. Следовательно, первый пункт определения 1 выполнен.

Пусть теперь $v_{@n+\Diamond} = (v,\varpi)$ – произвольная стратегия второго игрока. Тогда по построению найдется $\beta \in A$, для которого $u_{\&}(P(\alpha),\varpi) = u_+^\beta(P^\beta(\beta))$, $(u_+^\beta,P^\beta) = u_{@n\Diamond}(\omega_+^\beta,Q^\beta)$ и $P(\beta) = P(\alpha)$. Следовательно, для стратегии $v_{@n\Diamond} = (w,\omega_+^\beta,Q^\beta)$ будем иметь $g_{@n+\Diamond}(u_{@n+\Diamond},v_{@n+\Diamond}) = g(u_{\&}(P(\alpha),\omega),v) =$ $= g_{@n\Diamond}(u_{@n\Diamond},v_{@n\Diamond})$ и $h_{@n+\Diamond}(u_{@n+\Diamond},v_{@n+\Diamond},\alpha) = h(u_{\&}(P(\alpha),\omega),v,\alpha) = h_{@n\Diamond}(u_{@n\Diamond},v_{@n\Diamond},\alpha)$. А так как для этой стратегии $v_{@n\Diamond}$, как и для всякой другой выполняется одно из неравенств $g_{@n\Diamond}(u_{@n\Diamond},v_{@n\Diamond}) \geq \gamma$ или $h_{@n\Diamond}(u_{@n\Diamond},v_{@n\Diamond},\alpha) < \lambda^\alpha$, то справедливо одно из неравенств $g_{@n+\Diamond}(u_{@n+\Diamond},v_{@n+\Diamond}) \geq \gamma$ или $h_{@n+\Diamond}(u_{@n+\Diamond},v_{@n+\Diamond},\alpha) < \lambda$, то есть и второй пункт определения 1 выполнен.

А поскольку α произвольно, число γ является гарантированным результатом в игре $\Gamma_{@n+\Diamond}$. Значит, $R(\Gamma_{@n+\Diamond}) \geq \gamma$, а в силу произвольности γ будем иметь $R(\Gamma_{@n+\Diamond}) \geq R(\Gamma_{@n\Diamond})$.

Лемма доказана.

Теперь можно заниматься исследованием структурно более простой игры $\Gamma_{@n+\Diamond}$. Все результаты понятным образом переносятся и на игру $\Gamma_{@n\Diamond}$.

6 Децентрализация

Пример 1 наглядно показывает, что децентрализация управления может быть просто необходима, если оперирующая сторона хочет получить достаточно хороший результат, а ее возможности по получению достоверной информации ограничены. Естественно возникает вопрос о минимальной степени децентрализации, позволяющей получить нужный результат. Но чтобы его точно сформулировать, нужна количественная мера степени децентрализации.

Из полученных выше результатов видно, что в случае модели $\Gamma_\Diamond$ в качестве такой меры децентрализации естественно рассматривать «размер» множества W значений стратегии $u_\Diamond$, гарантирующей получение нужного результата. Аналогично, в игре $\Gamma_{@n+\Diamond}$ степень децентрализации можно характеризовать «размерами» множеств значений функций $\phi(\omega) = u_{\&}(s,\omega)$ при всех $s \in N$, где $(u_{\&},P)$ – стратегия, гарантирующая получение нужного результата. Если желательно избежать многокритериальности, можно ориентироваться на «размер» самого большого из таких множеств.

Правда, в общем случае не очень понятно, что следует понимать под «размером» множества. Но для дальнейшего это и не нужно. Достаточно содержательные результаты получаются уже в предположении, что размер определен так, что часть меньше целого. А максимум того, что требуется, состоит в предположении о том, что «размер» множества неотрицателен и аддитивен, а всякое множество можно разбить на два примерно одинаковых подмножества. В случае, когда множество U конечно, в качестве «размера» вполне можно рассматривать мощность множества, а если U – подмножество конечномерного евклидова пространства, то можно считать, что «размер» – это внешняя мера множества.

Перейдем к точным формулировкам, относящимся к играм типа $\Gamma_{@n+\Diamond}$.

С каждой стратегией $u_{@n+\Diamond} = (u_{\&},P)$ в игре $\Gamma_{@n+\Diamond}$ естественным образом связано семейство $\Xi(u_{@n+\Diamond}) = \{W(s,u_{\&}),\ s \in N\}$ множеств $W(s,u_{\&}) = \{u \in U \mid \exists\omega \in U\colon u = u_{\&}(s,\omega)\}$.

Пусть γ – гарантированный результат первого игрока в игре $\Gamma_{@n+\Diamond}$. Стандартным образом показывается, что тогда при любом $l > n$ число γ будет гарантированным результатом первого игрока в игре $\Gamma_{@l+\Diamond}$. Но как изменится необходимая степень децентрализации управления, при переходе от игры $\Gamma_{@n+\Diamond}$ к игре $\Gamma_{@l+\Diamond}$, если мы хотим получить один и тот же результат? Достаточно полный ответ на этот вопрос дает следующая теорема. Для простоты будем считать, что $l = n + 1$ (на общий случай результат переносится по индукции).

Теорема 4. Пусть $\gamma < R(\Gamma_{@n+\Diamond})$ и $l = n + 1$. Тогда для любой стратегии $u_{@n+\Diamond} = (u_{\&},P)$, гарантирующей первому игроку получение выигрыша γ в игре $\Gamma_{@n+\Diamond}$, и любого разбиения

$W(s,u_\&) = W'(s) \bigcup W''(s)$ $(W'(s) \bigcap W''(s) = \varnothing)$ найдется стратегия $u_{@l+\Diamond} = (w_\&,Q)$ в игре $\Gamma_{@l+\Diamond}$, гарантирующая получение того же результата в игре $\Gamma_{@l+\Diamond}$, для которой $W(0s,w_\&) \subset W'(s)$ и $W(1s,w_\&) \subset W''(s)$.

Доказательство. По условию стратегия $u_{@n+\Diamond}$ гарантирует первому игроку получение результата γ. Поэтому для любого $\alpha \in A$ можно зафиксировать число λ^α и стратегию $w^\alpha_{@n+\Diamond} = \left(w^\alpha, \varpi^\alpha\right)$ так, что будет выполняться условие $h_{@n+\Diamond}(u_{@n+\Diamond}, w^\alpha_{@n+\Diamond}, \alpha) = h(u_\&(P(\alpha), \varpi^\alpha), w^\alpha, \alpha) \ge \lambda^\alpha$ и, кроме того, для любой стратегии $v_{@n+\Diamond} = (v,\omega)$ справедливо одно из неравенств $g_{@n+\Diamond}(u_{@n+\Diamond},v_{@n+\Diamond}) = g(u_\&(P(\alpha),\omega),v) \ge \gamma$ или $h_{@n+\Diamond}(u_{@n+\Diamond},v_{@n+\Diamond},\alpha) = h(u_\&(P(\alpha),\omega),v,\alpha) < \lambda^\alpha$.

Определим отображение Q следующим образом. Пусть для какого-то $\alpha \in A$ имеем $P(\alpha) = s$. Тогда по определению множества $W(s,u_\&)$ выполняется включение $u_\&(s,\varpi^\alpha) \in W(s,u_\&)$. Если $u_\&(s,\varpi^\alpha) \in W'(s)$, то положим $Q(\alpha) = (0s)$, а если $u_\&(s,\varpi^\alpha) \in W''(s)$, то $Q(\alpha) = (1s)$. Тем самым отображение $Q: A \to \{0,1\}^l$ определено для всех α.

Определим множества $\Omega(0s) = \{u_\&(s,\varpi^\alpha)\colon\ Q(\alpha) = 0s\}$ и $\Omega(1s) = \{u_\&(s,\varpi^\alpha)\colon\ Q(\alpha) = 1s\}$, $s \in N$. Пусть $w_\&$: $\{0,1\}^l \times U$ – какая-нибудь функция, удовлетворяющая условиям

- $w_\&(\sigma,\omega) \in \Omega(\sigma)$ для любых $\sigma \in \{0,1\}^l$ и $\omega \in U$;
- $w_\&(\sigma,\omega) = \omega$ для любого $\omega \in \Omega(\sigma)$.

По построению $W(0s,w_\&) \subset \Omega(0s) \subset W'(s)$ и $W(1s,w_\&) \subset \Omega(1s) \subset W''(s)$.

Покажем, что так выбранная стратегия $u_{@l+\Diamond} = (w_\&,Q)$ гарантирует первому игроку получение выигрыша γ в игре $\Gamma_{@l+\Diamond}$. Фиксируем произвольное $\alpha \in A$ и положим $\lambda = \lambda^\alpha$.

Если $Q(\alpha) = (i,s)$, $i \in \{0,1\}$, $s \in N$, то $P(\alpha) = s$. Положим $w = w^\alpha$ и $\varpi = u_\&(s,\varpi^\alpha)$. Тогда для стратегии $w_{@l+\Diamond}$ будем иметь $h_{@l+\Diamond}(u_{@l+\Diamond},w_{@l+\Diamond},\alpha) = h(w_\&(Q(\alpha),\varpi),w,\alpha) = h(w_\&(is,\varpi),w,\alpha) = h(\varpi,w,\alpha) =$ $= h(u_\&(s,\varpi^\alpha),w^\alpha,\alpha) = h(u_\&(P(\alpha),\varpi^\alpha),w^\alpha,\alpha) \ge \lambda^\alpha = \lambda$.

Пусть теперь $v_{@l+\Diamond} = (v,\omega)$ – произвольная стратегия в игре $\Gamma_{@l+\Diamond}$. Тогда по построению найдется такое $\omega' \in U$, что $u_\&(s,\omega') = w_\&(is,\omega)$. Положим $v_{@n+\Diamond} = (v,\omega')$. Тогда либо $g_{@l+\Diamond}(u_{@l+\Diamond},v_{@l+\Diamond}) =$ $= g(w_\&(is,\omega),v) = g(u_\&(s,\omega'),v) = g_{@n+\Diamond}(u_{@n+\Diamond},v_{@n+\Diamond}) \ge \gamma$, либо $h_{@l+\Diamond}(u_{@l+\Diamond},v_{@l+\Diamond},\alpha) = h(w_\&(s,\omega),v,\alpha) =$ $= h(u_\&(s,\omega'),v,\alpha) = h_{@n+\Diamond}(u_{@n+\Diamond},v_{@n+\Diamond},\alpha) < \lambda^\alpha = \lambda$.

Следовательно, по определению γ – гарантированный результат в игре $\Gamma_{@l+\Diamond}$, что и доказывает теорему.

Практический смысл доказанной теоремы понятен: получив дополнительный бит информации о неопределенном факторе, первый игрок может позволить себе примерно вдвое сократить свободу выбора управления u для второго игрока без потери гарантированного результата (разумеется, «естественное» право второго игрока выбирать управление v остается в неприкосновенности).

Замечание 3. Доказанная теорема относится почти ко всем гарантированным результатам γ. Единственным исключением может оказаться число $\gamma = R(\Gamma_{@n+\Diamond})$, если оно является гарантированным результатом. В этом случае утверждение теоремы 4 может оказаться неверным. Впрочем, этот случай может представлять скорее теоретический, чем практический интерес.

Заключение

В работе начато систематическое изучение связи между наличием внешних неопределенных факторов и информированностью оперирующей стороны о их реализовавшихся значениях и целесообразной степенью децентрализации управления сложной иерархической системой. Наличие такой связи на неформальном уровне было впервые отмечено Ю.Б. Гермейером и Н.Н. Моисеевым (более подробное обсуждение и ссылки на первоисточники см. в [7]). Целью данной работы было построение точных математических моделей, описывающих данный эффект и получение каких-то количественных результатов.

Из полученных результатов видно, что тезис Гермейера–Моисеева хорошо подтверждается. Например, показано, что при полной информированности первого игрока о неопределенном факторе децентрализация управления если и не может навредить, то уж во всяком случае, не принесет дополнительной выгоды (см. теорему 3).

Полученная связь между объемом информации, который оперирующая сторона способна обработать, и необходимой степенью децентрализации тоже подтверждает этот тезис. Выше не вводилась специальная мера степени децентрализации, но полученные результаты выглядят весьма убедительно. Используя приведенные в предыдущем разделе свойства такой «меры децентрализации» несложно аксиоматизировать эту конструкцию и получить точные математические результаты. Но в этом пока нет особой необходимости.

Минимальные предположения, которые, использовались при построении моделей, вряд ли могут вызывать сомнения. Поэтому и полученные выводы выглядят достаточно убедительно.

Стоит сказать несколько слов об использованной математической технике. Выше рассмотрены несколько классов игр, наделенных дополнительной структурой, отражающей информированность первого игрока. Но поскольку все игры записаны в нормальной форме, эта дополнительная структура задается через наличие связей с другими играми. Фактически, в данном случае оказывается удобным перейти от теоретико-множественной идеологии к категорной.

Особого внимания заслуживает результат леммы 3. По сути, там установлен факт наличия игр, формально не изоморфных, но в то же время «одинаковых». И это имеет место не на уровне отдельных игр, а на уровне целых «естественных» классов. Поэтому весьма вероятно, что за этим стоит полезное понятие «гомоморфизма» игр. А такое понятие определенно заслуживает отдельного изучения.

Литература

1. *Бурков В.Н., Кондратьев В.В.* Механизмы функционирования организационных систем. – М.: Наука, 1981. – 384 с.
2. *Горелик В.А., Кононенко А.Ф.* Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. – М.: Радио и связь, 1982. – 144 с.
3. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. – М.: Наука, 1971. – 383 с.
4. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976. – 327 с.
5. *Горелов М.А.* Максимальный гарантированный результат в иерархических играх // Управление большими системами. Вып. 67. – М.: ИПУ РАН, 2017. – С. 4-31.
6. *Горелов М.А.* Делегирование полномочий в иерархических системах // Математическая теория игр и ее приложения. 2019. Т.11, В.4. – С. 44-66.
7. *Горелов М.А., Ерешко Ф.И.* Информированность и децентрализация управления // Автоматика и телемеханика. 2019. №6. – С. 156-172.
8. *Кононенко А.Ф., Халезов А.Д., Чумаков В.В.* Принятие решений в условиях неопределенности. – М.: ВЦ АН СССР, 1991. – 197 с.
9. *Мильгром П., Робертс Дж.* Экономика, организация и менеджмент. Т. 1. – СПб: Экономическая школа, 2004. – 468 с.
10. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. – М.: Мир, 1983. – 200 с.
11. *Новиков Д. А.* Теория управления организационными системами. – М.: МПСИ, 2005. – 584 с.
12. *Bolton P., Dewatripont M.* Contract Theory. – Cambridge: The MIT Press, 2005. – 724 p.