ПРИНЦИП МИНИМУМА ДОХОДНОСТИ В ЗАДАЧАХ С CC-VAR НА РЫНКАХ ОПЦИОНОВ

Агасандян Г.А.

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, г. Москва

agasand17@yandex.ru

Ключевые слова: континуальный критерий VaR, бета-распределение, прогнозная плотность, стоимостная плотность, принцип минимума доходности, регрессия, процедура Неймана-Пирсона.

Введение

Принцип минимума доходности (ПМД) был введен автором ранее в [1] как идея построения оптимального поведения инвестора на рынках опционов в ситуациях, когда инвестор, придерживающийся *континуального критерия VaR* (CC-VaR), располагает лишь частичным прогнозом будущей динамики базового актива, а в отношении неопределенности прогноза он готов следовать рыночным тенденциям, отражаемым в ценах опционов. Там же были рассмотрены примеры аналитического решения проблемы инвестирования для некоторых частных, хотя и интересных, случаев. Однако такой подход нельзя считать универсальным, поскольку аналитические методы помогают далеко не всегда. Здесь предлагается подход, связанный с применением дискретного алгоритма оптимизации по CC-VaR. Фактически речь идет о применении численных методов.

При задании прогнозной $p(\cdot)$ и стоимостной $c(\cdot)$ плотностей используется удобное гибкостью своего задания и естественное в отношении применения в реальных условиях двухпараметрическое бета-распределение, для которого аналитического решения получить не удается. Приходится проводить вычисления для разных значений параметров неопределенности из естественным образом определяемого множества, достаточного с точки доения желаемой точности, и выбора из них значения, доставляющего минимальную доходность инвестиции.

Напомним, что критерий CC-VaR требует построения из имеющихся на рынке инструментов такого портфеля, чтобы порождаемый им доход q удовлетворял неравенствам $\mathsf{P}\{q \ge \phi(\varepsilon)\} \ge 1 - \varepsilon$ для *всех* $\varepsilon \in [0, 1]$ ($\mathsf{P}\{M\}$ – вероятность множества (события) M в соответствии с прогнозом инвестора) [1-3]. Монотонно возрастающая и непрерывная функция $\phi(\varepsilon)$ определяет рисковые предпочтения инвестора. Алгоритм оптимизации основан на анализе функции относительных доходов с использованием процедуры Неймана-Пирсона из математической статистики [4].

Формализация принципа минимума доходности и определения

Как и при изучении многих иных теоретических проблем с критерием CC-VaR, здесь решается базовая континуальная *задача СВ* [1, 2], в которой рассматривается однопериодный теоретический идеальный рынок, инвестиционная сумма A (> 0) не задается, а ищется регулярный (свободный от сингулярной компоненты) портфель, доставляющий $\min A$ при выдерживании критерия CC-VaR. Частичность прогноза моделируется параметрическим заданием семейства прогнозных плотностей вероятности $\{p(x;\theta), \theta \in \Theta\}$ (параметр θ может быть векторным). Вводимый ПМД обеспечивает выбор инвестора определенной надежностью.

В условиях частичного прогноза инвестора привычные агрегаты задачи по необходимости снабжаются дополнительным аргументом $\theta \in \Theta$. Такие агрегаты, как функция относительных доходов, прогнозная функция (относительных доходов), стоимостная функция (относительных доходов) и диссонанта, записываются теперь соответственно соотношениями

$$\rho(x;\theta) = p(x;\theta)/c(x), \quad \theta \in \Theta,$$

$$\mathsf{f}_\mathsf{P}(\tau;\theta) = \mathsf{P}\{\rho(x;\theta) \le \tau\}, \quad \mathsf{f}_\mathsf{C}(\tau;\theta) = \mathsf{C}\{\rho(x;\theta) \le \tau\}, \quad \tau \ge 0,$$

$$\gamma(\varepsilon;\theta) = \mathsf{f}_\mathsf{C}\left(\mathsf{f}_\mathsf{P}^{\leftarrow}(\varepsilon;\theta);\theta\right), \quad \varepsilon \in [0,1].$$

При этом функция рисковых предпочтений инвестора $\phi(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0, 1]$, разумеется, не зависит от θ. Решение задачи оптимизации по CC-VaR при фиксированном значении θ дает средний доход R (не зависящий от θ) и стоимость $A(\theta)$ оптимального портфеля:

$$R = \int_0^1 \phi(\varepsilon)\,d\varepsilon, \quad A(\theta) = \int_0^1 \phi(\varepsilon)\,d\gamma(\varepsilon;\theta) = \int_0^\infty \phi\left(\mathsf{f}_\mathsf{P}(\tau)\right)d\mathsf{f}_\mathsf{C}(\tau).$$

Поскольку средняя доходность инвестиции

$$y(\theta)=R/A(\theta)-1=R\Big/\int_0^1\phi(\varepsilon)\,d\gamma(\varepsilon;\theta)-1,$$

а ПМД в задаче СВ сводится к требованию максимизации инвестиционной суммы A(θ), то

$$\theta_{\min}=\arg\min_\theta y(\theta)=\arg\max_\theta\int_0^1\phi(\varepsilon)\,d\gamma(\varepsilon;\theta).$$

Релевантные свойства ПМД для бета-распределений

Для обеих плотностей $p(\cdot)$ и $c(\cdot)$ используется двухпараметрическое бета-распределение:

$$\mathrm{Be}(\alpha,\mu):\quad x^{\alpha-1}(1-x)^{\mu-1}\big/\mathrm{B}(\alpha,\mu),\quad \alpha,\mu>0,\ \text{где}$$

$$\mathrm{B}(\alpha,\mu)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\mu-1}\,dx=\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)/\Gamma(\alpha+\mu)\ \text{ и }\ \Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}\exp(-x)\,dx$$

соответственно бета- и гамма-функции. Его математическое ожидание и дисперсия

$$(1)\quad \mathrm{E}X=\alpha/(\alpha+\mu),\quad \mathrm{D}X=\alpha\mu\Big/\left((\alpha+\mu)^2(1+\alpha+\mu)\right).$$

Далее прогнозная плотность $p(x)\sim\mathrm{Be}(\alpha,\mu)$, стоимостная плотность $c(x)\sim\mathrm{Be}(\beta,\nu)$, $\alpha,\mu,\ \beta,\nu>1$. Тогда функция относительного дохода и ее производная имеют вид

$$\rho(x)=p(x)/c(x)=x^{\alpha-\beta}(1-x)^{\mu-\nu}\,\mathrm{B}(\beta,\nu)/\mathrm{B}(\alpha,\mu),$$

$$\rho'(x)=u(x)l(x),\quad l(x)=(1-x)(\alpha-\beta)-x(\mu-\nu),$$

где функция u(x) на интервале (0, 1) строго положительна, может обращаться в нуль лишь на его границах, а l(x) – линейная функция. Потому знаки $\rho'(x)$ и l(x) совпадают. Кроме того, $l(0)=\alpha-\beta$, $l(1)=\nu-\mu$, а обращается в нуль функция l(x) в точке

$$(2)\quad x^*=(\alpha-\beta)/(\alpha+\mu-\beta-\nu).$$

При этом $x^*\in(0,1)$, если (i) $\alpha>\beta,\ \mu<\nu$ и (ii) $\alpha<\beta,\ \mu>\nu$. В этих двух случаях функция $\rho(x)$ унимодальна и достигает в $x^*\in(0,1)$ соответственно минимума и максимума.

Если $x^*\notin(0,1)$, производная $\rho'(x)$ на (0, 1) сохраняет знак и $\operatorname{sgn}[\rho'(x)]\equiv\operatorname{sgn}[\alpha-\beta]=\operatorname{sgn}[-\mu+\nu]$.

В случаях (iii) $x^*<0$ и (iv) $x^*>1$, как это следует из (2), функция $\rho(x)$ на интервале (0, 1) монотонно возрастает и убывает при $\alpha>\beta$ и $\mu>\nu$ соответственно. Или более детально: если $\Delta=\alpha-\beta+\mu-\nu$, то случаю (iii) отвечают условия 1) $\mu<\nu$, $\Delta>0$ и 2) $\mu>\nu$, $\Delta<\min(\alpha-1,0)$, а случаю (iv) – 1) $\alpha<\beta$, $\Delta>0$ и 2) $\alpha>\beta$, $\Delta<\min(\mu-1,0)$.

Игры на тренде и волатильности базового актива

Нетрудно усмотреть, что можно выделить два «чистых» случая:

(i) $\alpha>\beta,\ \alpha+\mu<\beta+\nu$, (ii) $\alpha<\beta,\ \alpha+\mu>\beta+\nu$

(iii) $\mu<\nu,\ \alpha+\mu>\beta+\nu$; (iv) $\alpha>\beta,\ \alpha+1<\beta+\nu,\ \alpha+\mu<\beta+\nu$

В случае (i) функция $\rho(x)$ на интервале (0, 1) монотонно возрастает, в случае (ii) – монотонно убывает. В случаях (iii) и (iv) функция $\rho(x)$ унимодальна и принимает в точке $x^*\in(0,1)$ соответственно минимальное и максимальное значения.

Случаи (i) и (ii) ассоциируются с негативным и позитивным трендами, а (iii) и (iv) – с покупкой и продажей волатильности базового актива. Хотя, как правило, в чистом виде такое на рынках не наблюдается. И, например, на игры с волатильностью накладывается некоторый тренд.

Для упрощения выбора параметров распределений вместо среднего и дисперсии будем оперировать составными параметрами $m=\alpha/\mu$ и $s=\alpha+\mu$. В соответствии с (1) среднее однозначно определяется отношением $m=\alpha/\mu$, и чем оно *больше*, тем *больше* среднее. Направленность изменения дисперсии неплохо, во всяком случае, в широком множестве случаев характеризуется суммой $s=\alpha+\mu$, и чем она *меньше*, тем *больше* дисперсия.

В новых параметрах *позитивный* (*негативный*) *тренд* моделируется выполнением неравенства $m_p>m_c$ ($m_p<m_c$). В примере 1 для позитивного тренда принимается $\beta=1.5$, $\nu=2.5$, что дает $m_c=0.6$, $s_c=4.0$, (для сравнения, $\sigma_c=0.216506$) и требуется, чтобы $m_p=0.8$ ($>m_c$). Оптимум для параметра μ определяется в соответствии с ПМД варьированием параметра s_p.

Для этого изменяются оба параметра α и μ, но так, чтобы $\alpha/\mu = m_p = 0.8$. При $m_p = 0.8$ параметр $s_p = \alpha + \mu = \alpha\,(1 + 1/m_p)$ меняется в пределах от $2.25a_1$ до $2.25a_2$, где (a_1, a_2) – назначаемый интервал изменения параметра α и подбираемый после пробных вычислительных экспериментов так, чтобы минимум достигался в его пределах. В результате $a_1 = 1.0$, $a_2 = 3.0$.

В этом интервале задается $k + 1$ значение параметра α с $k = 50$. Для параметра α получатся дискретное множество значений $\alpha_j = a_1 + j\Delta$, $j \in J = \{1, \dots, k\}$, $k = 50$, $\Delta = (a_2 - a_1)/k = 0.04$. Им отвечают прогнозные плотности

pj(x) ~ Be(αj, αj/mp), j∈J.

С ними дискретный алгоритм оптимизации по CC-VaR дает k-мерный вектор средних доходностей, а наименьшей среди них оказывается 29-я компонента, для которой $\alpha_{29} = 2.16$, и потому $s_p = 4.86$ ($\sigma_p = 0.205269$), что на наш взгляд не сильно отличается от $s_c = 4.0$.

На рис. 1 слева представлены графики плотности $c(\cdot)$ и найденной оптимальной плотности $p_{29}(\cdot)$ (прерывистая и сплошная толстая линии соответственно). Дополнительно сплошными тонкими линиями изображены 20 из 50 тестируемых плотностей $p(\cdot)$, следующих друг за другом на одинаковых по параметру μ расстояниях.

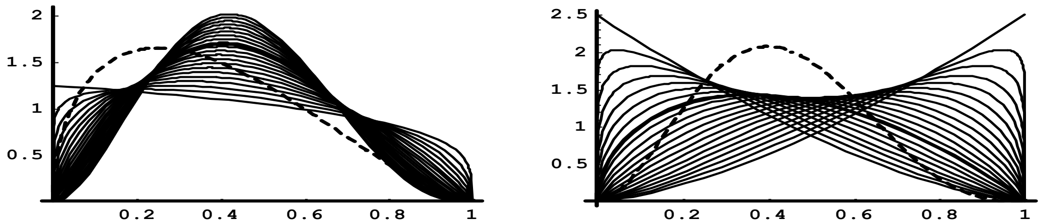

Рис. 1. Графики позитивного тренда и покупки волатильности.

Аналогично *покупка* (*продажа*) *волатильности* моделируется выполнением неравенства $s_p < s_c$ ($s_p > s_c$). В примере 2 для *покупки волатильности* $\beta = 3.0$, $\nu = 4.0$, и потому $m_c = 0.75$, $s_c = 7.0$ ($\sigma_c = 0.174964$). Требуется, чтобы $s_p = 3.5 < s_c$ (при этом $\sigma_p = 0.259355 > \sigma_c$), а оптимум ищется варьированием m_p.

В распоряжении инвестора остается параметр s_p, который надлежит выбирать согласно ПМД. Его варьированием получается семейство плотностей $p(x)$ для тестирования.

Вновь изменяются оба параметра α и μ, но на этот раз так, чтобы $\alpha + \mu = \alpha\,(1 + 1/m_p) = s_p = 3.5$. Поскольку $m_p = \alpha/\mu$, то при $s_p = 3.5$ параметр m_p меняется в пределах от $a_2/(3.5 - a_2)$ до $a_1/(3.5 - a_1)$, где (a_1, a_2) – диапазон изменения параметра α (зависимость m_p от α – обратная!). Интервал (a_1, a_2) для α подбирается аналогично задаче 1. В результате $a_1 = 1.0$, $a_2 = 2.5$.

В этом интервале задается $k + 1$ значение параметра α, $k = 50$. Для параметра α получаем дискретное множество значений $\alpha_j = a_1 + j\Delta$, $j \in J = \{1, \dots, k\}$, $k = 50$, $\Delta = (a_2 - a_1)/k = 0.03$. Им отвечают прогнозные плотности

$p_j(x) \sim \mathrm{Be}(\alpha_j, s_p - \alpha_j)$, $j \in J$.

Наконец, применением к ним алгоритма оптимизации по CC-VaR находится k-мерный вектор средних доходностей. Наименьшую доходность доставляет 18-я компонента, для нее $\alpha_{18} = 1.54$, и потому $m_p = 0.785714$. И вновь значение m_p не сильно отличается от $m_c = 0.75$. Соответствующие такой покупке волатильности графики изображены на рис. 1. справа.

Для рассмотрения *негативного тренда* достаточно в примере 1 произвести замену $x \leftrightarrow 1 - x$, а *продажи волатильности* – в примере 2 поменять ролями $p \leftrightarrow c$.

Литература

1. *Агасандян Г.А.* Применение континуального критерия VaR на финансовых рынках. М.: ВЦ РАН, 2011. 299 с.
2. *Агасандян Г.А.* Континуальный критерий VaR на сценарных рынках // Информатика и ее применения. // Информатика и её применения, 2018. Т. 12. Вып. 1. С. 32–40.
3. *Агасандян Г.А.* Континуальный критерий VaR и оптимальный портфель инвестора // Управление большими системами. М.: ИПУ РАН, 2018. Вып. 73. С. 6-26.
4. *Крамер Г.* Математические методы статистики / Пер. с англ.– М.: Мир, 1975. 750 с. (Cramer H. Mathematical methods of statistics. – Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1946. 575 p.)