ОБ ИГРЕ НА ХВОСТЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ПРИНЦИП МИНИМУМА ДОХОДНОСТИ С CC-VAR НА РЫНКАХ ОПЦИОНОВ

Агасандян Г.А.

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, г. Москва

agasand17@yandex.ru

Ключевые слова: континуальный критерий VaR, бета-распределение, хвост распределения, прогнозная плотность, стоимостная плотность, принцип минимума доходности, регрессия, процедура Неймана-Пирсона.

Введение

Работа служит непосредственным продолжением [1]. Ее также можно рассматривать в рамках проблемы применения континуального критерия VaR (CC-VaR) на финансовых рынках в условиях, когда инвестор предлагает лишь частичный прогноз в отношении будущих случайных свойств базового актива рынка опционов [2-4]. В остальном инвестор склонен соглашаться с рынком, который проявляет себя в ценах опционов. Именно в такой ситуации оказывается востребованным принцип минимума доходности (ПМД), который позволяет инвестору в задачу оптимизации по CC-VaR естественным образом встроить задачу определения недостающей информации о будущем движении базового актива.

Как и в работе [1], при решении задачи инвестирования здесь применяются универсальные приближенные методы, оправданные использованием и для рынка, и для прогноза двухпараметрического бета-распределения, с которым возникают затруднения в получении точного аналитического решения. Но, если в работе [1] (а также в [2] аналитическими средствами) изучались традиционные постановки задач, таких как игры, на направленном движении рынка, а также покупка или продажа волатильности, здесь постановки задач формально упрощены тем, что в них непосредственно определяются лишь косвенно влияющие на среднее и дисперсию параметры используемых в иллюстративных целях бета-расределений. Изучаются свойства решений, получаемых в задачах инвестирования на рынках опционов применением ПМД. Используется специальный подход, родственный построению регрессии в постановках задач принятия статистических решений. Но применяется он по необходимости для детерминированной части задачи.

Формализация принципа минимума доходности

Напоминаем основные формулы, важные для понимания постановки проблемы и ее решения (в дополнение к обозначениям и алгоритмам из [1]). Применяемый инвестором критерий CC-VaR требует построения из имеющихся на рынке инструментов такого портфеля, чтобы порождаемый им доход q удовлетворял неравенствам $\mathsf{P}\{q \ge \phi(\varepsilon)\} \ge 1-\varepsilon$ сразу для *всех* $\varepsilon \in [0, 1]$, где $\mathsf{P}\{M\}$ – вероятность множества (события) M, соответствующая прогнозу инвестора [1-4], а функция рисковых предпочтений (ф.р.п.) инвестора $\phi(\varepsilon)$ – монотонно возрастающая непрерывная функция.

Как обычно, в каждой полностью сформированной задаче с таким критерием задаются прогнозная $p(\cdot)$ и стоимостная $c(\cdot)$ плотности вероятности. Ее решение – оптимизация инвестиционного портфеля – основано на анализе функции относительных доходов с использованием процедуры Неймана-Пирсона из математической статистики [5]. В работе для плотностей используется удобное для интерпретации бета-распределение, но для него аналитическое исследование затруднительно и потому применяется наиболее универсальный дискретный алгоритм.

Предлагаемый *принцип минимума доходности* вызван рассмотрением задач с частичным прогнозом инвестора, моделируемым введением в прогнозную плотность параметра (возможно, векторного), т.е. заданием семейства $\{p(x;\theta), \theta \in \Theta\}$. При этом функции $\phi(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0, 1]$, и стоимостная плотность $c(x)$, $x \in [0, 1]$, разумеется, не зависят от θ, но прочие привычные агрегаты задачи, в частности, прогнозная плотность $p(x;\theta)$, функция относительных доходов $\rho(x;\theta) = p(x;\theta)/c(x)$ и диссонанта $\gamma(\varepsilon;\theta)$, нагружаются теперь дополнительным параметром θ.

Решение задачи оптимизации по CC-VaR при фиксированном значении θ дает [1-4] средний доход R, стоимость $A(\theta)$ оптимального портфеля и среднюю доходность инвестиции $y(\theta)$

$$R=\int_0^1 \phi(\varepsilon)\,d\varepsilon, \quad A(\theta)=\int_0^1 \phi(\varepsilon)\,d\gamma(\varepsilon;\theta), \quad y(\theta)=R\big/A(\theta)-1=R\Big/\int_0^1 \phi(\varepsilon)\,d\gamma(\varepsilon;\theta)-1.$$

Поэтому ПМД сводится к требованию *максимизации* инвестиционной суммы $A(\theta)$:

$$\theta_{\min} = \arg\min_{\theta} y(\theta) = \arg\max_{\theta} \int_0^1 \phi(\varepsilon)\, d\gamma(\varepsilon;\theta).$$

Игра на хвосте распределения и алгоритм ее решения

Рассмотрим естественный для бета-распределений класс задач на применение ПМД – игры на хвосте распределения. Речь идет о бета-распределенных ценах базового актива и их прогнозе. Именно, для обеих плотностей $p(\cdot)$ и $c(\cdot)$ используется двухпараметрическое бета-распределение:

$$\mathrm{Be}(\alpha,\mu):\quad x^{\alpha-1}(1-x)^{\mu-1}\big/\mathrm{B}(\alpha,\mu),\quad \alpha, \mu > 0, \text{ где}$$

$$\mathrm{B}(\alpha,\mu) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\mu-1}\,dx = \Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)\big/\Gamma(\alpha+\mu) \quad \text{и} \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}\exp(-x)\,dx$$

соответственно бета - и гамма-функции. Далее прогнозная плотность $p(x) \sim \mathrm{Be}(\alpha, \mu)$, стоимостная плотность $c(x) \sim \mathrm{Be}(\beta, \nu)$, $\alpha, \mu, \beta, \nu > 1$. При $\alpha > \beta$ инвестор будет стремиться к *продаже* левого хвоста распределения, при $\alpha < \beta$ – к его *покупке*.

В силу внутренней зеркальной симметрии семейства бета-распределений аналогично возникают задачи о *продаже* и *покупке* правого хвоста распределения. При этом параметры α и β в задаче просто меняются ролями с параметрами μ и ν соответственно.

Игры с применением ПМД на одном из хвостов распределения интересны сами по себе. но не менее интересно и то, как они связаны (если вообще связаны) с играми, рассмотренными а [1]. Интуитивные соображения, подкрепленные предварительными расчетами, подводят к тому, что продажа, например, левого хвоста (при $\alpha > \beta$) требует и продажи правого (когда $\mu_{\text{opt}} > \nu$), что в итоге сводит такую игру на хвосте к продаже волатильности.

В игре на левом хвосте распределения должны быть заданы три параметра α, β и ν, и требуется определить $\mu_{\text{opt}} = h(\alpha, \beta, \nu)$. Будет проверяться гипотеза, что

(i) $h(\beta, \beta, \nu) = \nu$.

(ii) при фиксированных параметрах β и ν функция $h(\alpha, \beta, \nu)$ монотонно *возрастает* по α.

Едва ли был бы оправдано применение ПМД при нарушении части (i) гипотезы (о симметричности). Но уже часть (ii) требует дополнительного осмысления, и если не в отношении монотонности, то в ее направленности.

Для подтверждения гипотезы предлагается такая схема вычислительных экспериментов. Задаются тестовые дискретные множества параметров α, β, μ, ν в количествах I, J, M, N соответственно. Для каждого набора значений этих четырех параметров решается стандартная дискретная задача оптимизации по CC–VaR с K сценариями и находится доходность инвестиции.

Затем для каждой тройки параметров α, β, ν определяется значение параметра μ с минимальной доходностью. Тем самым находится функция $\mu_{\text{opt}} = h(\alpha, \beta, \nu)$, и гипотеза может проверяться. В экспериментах, предназначенных для анализа проблемы, выбираются относительно небольшие объемы данных: $I = J = 12$, $M = 19$, $N = 5$, $K = 20$, именно

(1) $\alpha, \beta = 1.25, 1.5, 1.75, 2, 2.25, 2.5, 2.75, 3, 3.25, 3.5, 3.75, 4;$

(2) $\nu = 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5;\ \ \mu m = 1 + 10\ (m/M)3,\ m = 1, 2, ..., M.$

Подобный выбор диапазонов для параметров определяется соображениями минимизации практической достаточности и сводится к их небольшим значениям, а для параметра μ еще и стремлением во избежание дополнительных систематических ошибок не допускать выхода μ_{opt} на границы диапазона.

Иллюстративные примеры

Задачи оптимизации по CC–VaR осуществляются для всех пар (α, β) из наборов (1) и каждого значения ν из (2). При решении всех таких задач принимается $\phi(\varepsilon) = \varepsilon^2$. Получаемые результаты служат основой для построения регрессии. В качестве функции регрессии для каждого значения ν принимается полиномиальная функция второй степени, притом фактически одной переменной $\alpha - \beta$, к чему подводит сам вид функции относительных доходов, поскольку в данной задаче

$$\rho(x) = p(x)/c(x) = x^{\alpha-\beta}(1-x)^{\mu-\nu}\,\mathrm{B}(\beta,\nu)/\mathrm{B}(\alpha,\mu).$$

Имеем

(3) $\mu\text{opt} = h(\nu; \alpha, \beta) = \nu + \vartheta 0 + \vartheta 1(\alpha - \beta) + \vartheta 2(\alpha - \beta)2.$

Метод наименьших квадратов на основе построенных данных дает в результате

(4) $\vartheta0 = 0.00120266,\ \ \vartheta1 = 0.973058,\ \ \vartheta2 = 0.208499;$

(5) $\mu\mathrm{opt} = 0.00120266 - 0.973058\ (\alpha - \beta) + 0.208499\ (\alpha - \beta)2.$

Среднеквадратическое отклонение, рассчитанное по остаточной сумме квадратов, равно 0.414601, что представляется вполне приемлемым с учетом грубости дискретной модели и использования относительно высоких значений параметров бета-распределений, ответственных за излишне деликатное поведение их плотности в окрестности нуля и единицы.

Проводится и проверка адекватности (скорее, возможной неадекватности) ПМД–модели, которая подтверждает часть (i) гипотезы. К типичным можно отнести расчеты при $\nu = 2$ и всех тестируемых α и β, $\alpha = \beta$, от 0.25 до 2.75. При $K = 100$ и $M = 50$ оптимальным по ПМД будет значение $\mu_{\mathrm{opt}} = 1.95112$, достигаемое при $m = 29$. Хотя увеличение до $M = 100$ не показывает повышения реализованной точности – оптимум достигается при $m = 59$ и равен $\mu_{\mathrm{opt}} = 2.05379$, но уже при $M = 200$ и даже при пониженном объеме $K = 50$ оптимально $\mu_{\mathrm{opt}} = 2.00201625$ (при $m = 117$).

Соотношения (3)–(5), оперирующие средними характеристиками, тем не менее, с очевидностью говорят также в пользу части (ii) гипотезы. Кроме того, при прогонках по всем α, β и ν, естественно, не претендующих на теоретическую точность, в каждом эксперименте неравенства $\alpha > \beta$ и $\mu_{\mathrm{opt}} > \nu$ выполнялись одновременно. И то же в отношении противоположных неравенств, а это уже веское основание для признания гипотезы.

В завершение анализа игр на хвосте распределения приведем результаты подобных игр уже на новых данных, непосредственно не участвовавших в получении соотношений (4), (5). Кроме того, значения параметров распределений для них выходят за пределы интервалов, принятых в модели регрессии. А результаты сопоставляются именно с моделью.

В тесте для *покупки* фиксируются $\alpha = 4$, $\beta = 3$, $\nu = 4$, программа оптимизации по CC-VaR с ПМД дает $\mu_{\mathrm{opt}} = 6{,}49802$, по регрессии (5) $\mu^* = 6{,}18276$, и отклонение $\mu_{\mathrm{opt}} - \mu^* = 0{,}31526$. Для *продажи* $\alpha = 4$, $\beta = 3$, $\nu = 2$, также $\mu_{\mathrm{opt}} = 3{,}47072$, согласно (5) $\mu^* = 4{,}23664$, и отклонение $\mu_{\mathrm{opt}} - \mu^* = -0{,}76592$.

Оба эти результата вполне увязываются со среднеквадратическим отклонением в регрессии $\sigma = 0{,}414601$ (во всяком случае, согласно правилу «трех сигм» из математической статистики). Соответствующие *покупке* и *продаже* левого хвоста графики изображены на рис. 1 слева и справа соответственно.

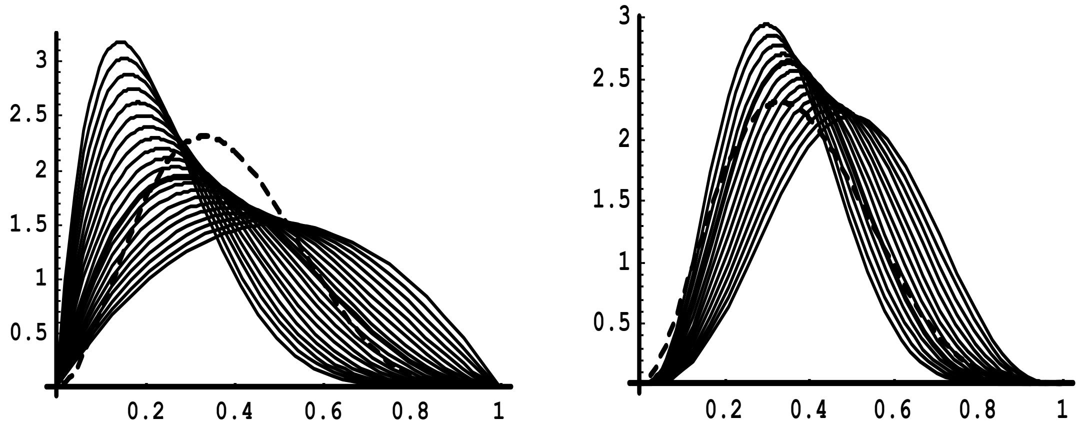

Рис. 1. Графики покупки и продажи левого хвоста.

Отчетливо усматривается, что результатом является одновременно также покупка и продажа волатильности (пунктирная линия отвечает стоимостной плотности, толстая сплошная – прогнозной). Хотя, как это часто бывает, на обе операции накладывается и некоторое смещение (тренд). И все-таки, ценность выводов может показаться несколько сниженной, поскольку решения находятся не аналитическими методами, а численными, и потому не совсем точны.

Литература

1. *Агасандян Г.А.* Принцип минимума доходности в задачах с CC-VaR на рынках опционов // Материалы четырнадцатой международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» MLSD’2020, под общей редакцией С.Н.Васильева, А.Д.Цвиркуна, 5-7 октября. Москва, ИПУ РАН. Печатается в настоящих материалах.
2. *Агасандян Г.А.* Применение континуального критерия VaR на финансовых рынках. М.: ВЦ РАН, 2011. 299 с.
3. *Агасандян Г.А.* Континуальный критерий VaR на сценарных рынках // Информатика и ее применения. // Информатика и её применения, 2018. Т. 12. Вып. 1. С. 32–40.
4. *Агасандян Г.А*. Континуальный критерий VaR и оптимальный портфель инвестора // Управление большими системами. М.: ИПУ РАН, 2018. Вып. 73. С. 6-26.
5. *Крамер Г.* Математические методы статистики / Пер. с англ.– М.: Мир, 1975. 750 с. (Cramer H. Mathematical methods of statistics. – Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1946. 575 p.)