СЕКЦИЯ 4: ИМИТАЦИЯ И ОПТИМИЗАЦИЯ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЕМ КРУПНОМАСШТАБНЫХ СИСТЕМ

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПРИ СОГЛАСОВАНИИ ХАРАКТЕРИСТИК В МНОГОАГЕНТНЫХ СИСТЕМАХ И ЕЕ ГРАФОВАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Агаев Р.П., Хомутов Д.К.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная, д.65
agaraf3@gmail,com, homutov_dk@mail.ru

Аннотация: Доклад посвящен проблеме регуляризации при согласовании характеристик и консенсусе в многоагентных системах. Опираясь на теорию обобщенно-обратных матриц и алгебраическую теорию графов, доказано, что метод ортогональной проекции является естественным обобщением метода консенсуса для несвязного орграфа коммуникаций. Приведена графовая интерпретация метода ортогональной проекции.

Ключевые слова: многоагентные системы, консенсус, согласование характеристик, лапласовская матрица, ортогональная проекция.

Введение

Работа посвящена проблеме регуляризации в многоагентных системах с информационными связями. Информационная связь между интеллектуальными агентами задается орграфом влияний $G = (V, E)$, где $V = \{1, \dots, n\}$ – множество вершин орграфа, которое соответствует агентам, а $E \subseteq V \times V$ – множество дуг в орграфе, соответствующее связям между агентами. По данному орграфу построим матрицу смежности $A = (a_{ij})$ следующим образом: если агент j влияет на агента i, то в орграфе влияний существует дуга из j в i с весом a_{ij}.

Рассмотрим базовую дифференциальную модель консенсуса первого порядка [1-3]:

$$\dot{x}_i(t) = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\left(x_i(t) - x_j(t)\right), \tag{1}$$

где $x(t) = \left(x_1(t), \dots, x_n(t)\right)^T$ – вектор характеристик агентов. Систему (1) можно записать в матричной форме как

$$\dot{x}(t) = -L(t)x(t),$$

где $L(t)$ – лапласовская матрица орграфа влияний: $l_{ii} = \sum_{j \neq i} a_{ij}$, $l_{ij} = -a_{ij}$.

Процесс согласования характеристик (1) сходится, если при любых начальных условиях $x(0)$ и любых i, j имеет место

$$\left|x_i(t) - x_j(t)\right| \to 0, \text{ при } t \to \infty.$$

Характер сходимости протокола (1) определяется свойствами матрицы L. Известно, что (см., например, [4]) в многоагентной системе с информационными связями консенсус достигается тогда и только тогда, когда орграф содержит исходящее дерево. Эквивалентным условием достижения консенсуса является единственность нулевого собственного значения лапласовской матрицы [5, 6].

Определение 1. Подграф G_B назовем базовой бикомпонентой орграфа G, если G_B сильно связный и нет входящей в G_B дуги из вершины, не принадлежащей G_B. Соответствующую подматрицу обозначим через B.

Определение 2. Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ – квадратная матрица, $R(A)$ и $N(A)$ – образ и ядро матрицы A, $\nu = \operatorname{index} A$ – наименьшее число $k \in \{0, 1, \; n-1\}$, при котором $\operatorname{rank} A^{k+1} = \operatorname{rank} A^k$. Собственным проектором матрицы A для нулевого собственного значения называют такой проектор

$A^{\vdash}$, что $R(A^{\vdash}) = N(A^{\nu})$ и $N(A^{\vdash}) = R(A^{\nu})$. $A^{\vdash}$ есть проектор на $N(A^{\nu})$ вдоль $R(A^{\nu})$. $A^{\vdash}$ идемпотентна: $(A^{\vdash 2} = A^{\vdash})$.

Определение 3. Для любой прямоугольной матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ существует единственная матрица $A^{+} \in \mathbb{C}^{n\times m}$, для которой выполняются следующие четыре условия:

1) $A^{+}AA^{+} = A^{+}$; 2) $AA^{+}A = A$; 3) $(AA^{+})^{*} = AA^{+}$; 4) $(A^{+}A)^{*} = A^{+}A$.

Матрицу A^{+} называют псевдообратной по Муру-Пенроузу.

При доказательстве основных утверждений нам понадобится следующая теорема.

Теорема 1 (матричная теорема о деревьях). Алгебраическое дополнение любого элемента k-й строки лапласовской матрицы равно суммарному весу остовных исходящих из k-й вершины деревьев.

Если $x(t)$ – решение системы (1), то

$$x(t) = e^{-Lt}x(0)$$

и

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = L^{\vdash} \cdot x(0). \qquad (2)$$

Внизу приведен собственный проектор некоторой лапласовской матрицы орграфа влияний, который состоит из двух несвязанных компонент, между которыми нет никакого пути (даже без учета направлений):

$$L^{\vdash} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

В этом случае не для каждого вектора начальных значений консенсус достигается. Действительно, для вектора $x(0) = (2, 4, 3, 9)^{T}$ в системе с протоколом (1) консенсус не достигается. Поэтому, возникает необходимость в некоторой регуляризации, обеспечивающей согласование характеристик при любом векторе начальных значений. Очевидно, что после «вмешательства» в систему вместо собственного проекта из (2) с рангом больше 1, мы должны получить идемпотентную стохастическую матрицу единичного ранга.

Такая же проблема возникает при решении задачи PageRank [7] в Интернете, где нужно регуляризовать исходную стохастическую матрицу так, чтобы левый собственный вектор, соответствующий единичному собственному значению, был единственным (с точностью до множителя). В задаче PageRank вместо исходной стохастической матрицы P используется матрица Q, определяемая выражением

$$Q = \alpha P + (1 - \alpha)V,$$

где $V = \mathbf{1}^{T}v = (1, \dots, 1)^{T}(v_1, \dots, v_n)$, $v -$ вектор стационарного распределения, $\alpha \approx 0{,}15$.

Аналогичный метод используется при кластеризации на несвязном орграфе. Например, в [8, 9] предложен алгоритм кластеризации направленной сети по методу взвешенного сечения (разреза) орграфа. Авторы используют диагональные матрицы, диагональные элементы которых равны элементам вектора стационарного распределения (единственного левого собственного вектора матрицы случайного блуждания с единичной суммой). Известно, что если стохастическая матрица не регулярна, т.е. собственное значение 1 имеет кратность больше единицы, то такой собственный вектор не единственный. Поэтому не для каждого орграфа существует единственный вектор стационарного распределения для собственного значения 1. В связи с этим возникает вопрос нахождения вектора, который можно было бы использовать вместо стационарного вектора с положительными элементами.

1 Методы регуляризации

Спектр методов, посвященных проблеме регуляризации, не велик. Это связано с тем, что в значительном числе прикладных задач для регуляризации используется метод, применяемый в задаче PageRank. В [10] в качестве регуляризации в протоколах консенсуса также применяется метод, аналогичный методу PageRank. Методы, приведенные в [10], основаны на добавлении фоновых связей с маленькими весами.

1.1 Протокол со слабыми фоновыми связями агентов

Пусть v – вектор распределения, т.е. $v_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n)$, $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$. Рассмотрим протокол поиска консенсуса, в котором к исходному орграфу влияний добавляется полный взвешенный орграф «фоновых связей»:

$$\dot{x}(t) = -(L_0 + \delta D)x(t), \tag{3}$$

где $\delta > 0$, $D = I - V$, $V = \mathbf{1}v^{\mathrm{T}}$.

Утверждение 1. Если $x(t)$ – решение системы (3), то

$$\lim_{\delta \to +0} \lim_{t \to \infty} x(t) = \mathbf{1}v^{\mathrm{T}} L^{\vdash} x(0).$$

Если $v = \frac{1}{n}\mathbf{1}$, то имеем

$$\lim_{\delta \to +0} \lim_{t \to \infty} x(t) = E L^{\vdash} x(0),$$

где E – матрица с элементами n^{-1}.

С другими методами регуляризации можно ознакомиться в [10].

1.2 Метод ортогональной проекции

В [11] для решения задачи согласования характеристик для дискретной модели ДеГроота был предложен метод ортогональной проекции. Согласно этому методу пространство всевозможных начальных мнений отображается на специальное подпространство T_P – область сходимости процедуры ДеГроота. В качестве такого преобразователя S используется матрица-проектор с образом $\mathcal{R}(S)$. На самом деле $\mathcal{R}(S)$ совпадает с линейной оболочкой векторов, состоящих из линейно независимых столбцов матрицы $I - P$ и вектора из единиц. Если x_0 – вектор начальных мнений, а x_0' – преобразованный вектор, тогда $\|x_0' - x_0\|$ будет минимальным, поскольку матрица-проектор S является симметричной. Данный метод имеет определенную «особенность»: после преобразования исходного вектора некоторые координаты преобразованного вектора могут иметь отрицательные знаки. Однако, $P^{\infty}S$ является стохастической матрицей. Нетрудно показать, что это произведение, помимо стохастичности, также является идемпотентным, и его ранг равен единице. По этой же причине, если вектор начальных значений имеет только положительные координаты, то итоговый вектор $P^{\infty}S\,x_0$ также будет положительным.

В [11] в качестве альтернативы методу ортогональной проекции предлагается еще один метод регуляризации, где вместо матрицы S используется стохастическая матрица, являющаяся наилучшим приближением исходной матрицы, переводящая векторы начальных мнений в векторы, принадлежащие области согласия. Такая матрица должна быть наилучшим приближением исходной матрицы, а наилучшее приближение можно проверить некоторой матричной нормой, например, евклидовой нормой. На матрицу коррекции накладывается дополнительное условие, требующее идемпотентности с образом T_P. В противном случае она будет изменять некоторые векторы начальных мнений, не нуждающиеся в предкоррекции, уже лежащие в T_P. Задача нахождения такой матрицы имеет много общего с классической задачей аппроксимации матриц. В литературе по теории матриц эти задачи хорошо изучены, и в основе этих исследований лежит сингулярное разложение матриц.

2 Основные результаты

Далее предположим, что вершины орграфа пронумерованы таким образом, что лапласовская матрица имеет следующее представление:

$$L = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_v \end{pmatrix},$$

и $p_i = |B_i|$.

В настоящей работе предполагается, что каждая вершина орграфа принадлежит некоторой базовой бикомпоненте.

Для лапласовской матрицы L с рангом $n - v$ построим матрицу U следующим образом: для каждой базовой бикомпоненты удалим один столбец и к полученной матрице полного столбцового ранга в качестве первого столбца добавим столбец из единиц.

Заметка 1. Согласно (2), если орграф влияний содержит остовное исходящее дерево, то консенсус однозначно определяется выражением

$$(l_{11}^{\vdash}, \dots, l_{1n}^{\vdash})(x_1(0), \dots, x_n(0))^T.$$

При наличии остовного дерева $l_{1i}^{\vdash} = l_{ki}^{\vdash}$ для всех i и k, т.е. все строки матрицы $L^{\vdash}$ совпадают, и как было доказано в [5],

$$l_{1i}^{\vdash} = \frac{w_i}{w}, \tag{4}$$

где w_i – вес множества всех исходящих деревьев, в которых вершина i является корнем, w – вес множества всех исходящих деревьев. В силу теоремы 1 из представления (4) следует:

$$l_{1i}^{\vdash} = \frac{w_i}{w} = \frac{U(i)}{\det(U)}, \tag{5}$$

где $U(i)$ – алгебраическое дополнение любого элемента i-й строки. Здесь $w_i = U(i)$ и $w = \det(U)$.

Утверждение 2. Пусть E_{10} - квадратная матрица порядка n, первый столбец которой состоит из единиц, а все остальные элементы равны нулю. Тогда

если $\operatorname{rank}(L) = n - 1$, то $L^{\vdash} = E_{10}U^{-1}$;

если $\operatorname{rank}(L) < n - 1$, то $L^{\vdash}S = E_{10}U^{+}$.

Доказательство:

1) Из $L^{\vdash}L = 0$ следует: $L^{\vdash}U = E_{10}$. Тогда $L^{\vdash} = L^{\vdash}UU^{-1} = E_{10}U^{-1}$.

2) Если $\operatorname{rank}(L) < n - 1$, то $L^{\vdash}S = L^{\vdash}UU^{+} = E_{10}U^{+}$. Поскольку $L^{\vdash}S$ – стохастическая матрица [11], получается, что первая строка матрицы U^{+} состоит из неотрицательных элементов, сумма которых равна 1.

Из пункта 2) утверждения 2 непосредственно следует, что все строки матрицы $L^{\vdash}S$ совпадают с первой строкой матрицы U^{+}. Поэтому свойства метода ортогональной проекции характеризуются первой строкой матрицы U^{+}. В [11] доказано, что матрица $L^{\vdash}S$ – стохастическая. Как было отмечено выше, протокол слабых фоновых связей усредняет столбцовые элементы собственного проектора. Чтобы ответить на вопрос, как регуляризуется собственный проектор с кратными единичными собственными значениями, воспользуемся выражением для поэлементного представления псевдообратной матрицы [12]:

$$u_{1i_1}^{+} = \frac{\sum_{i_2<\cdots<i_r} U\begin{pmatrix} i_2 & \cdots & i_r \\ 2 & \cdots & r \end{pmatrix} U\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix}}{\sum_{k_1<\cdots<k_r} \left(U\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_r \\ 1 & \cdots & r \end{pmatrix} \right)^2}, \tag{6}$$

где $U\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_k \\ \beta_1 & \cdots & \beta_k \end{pmatrix}$ – определитель подматрицы U со строками $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$ и столбцами $(\beta_1, \cdots, \beta_k)$.

Выражение (6) позволят охарактеризовать протокол ортогональной проекции через лесную структуру орграфа влияний. Кроме того, мы приведем более компактное доказательство ранее доказанной теоремы. Для этого нам понадобится доказать следующие утверждения.

Утверждение 3.

1) Минор $U\begin{pmatrix} i_2 & \cdots & i_r \\ 2 & \cdots & r \end{pmatrix}$ равен нулю, если множество $\{i_2, \dots, i_r\}$ содержит все вершины одной базовой бикомпоненты.

2) Абсолютное значение ненулевого минора $U\begin{pmatrix} i_2 & \cdots & i_r \\ 2 & \cdots & r \end{pmatrix}$ равно произведению весов множеств всех исходящих из вершин $\{1,\dots,n\}\backslash\{i_2,\dots,i_r\}$ деревьев.

Доказательство:

1) Пусть множество $\{i_2,\dots,i_r\}$ содержит все вершины $\{j_1,\dots,j_p\}$ одной базовой бикомпоненты. Тогда подматрица со строками $\{j_1,\dots,j_p\}$ содержит всего $p-1$ ненулевых столбцов. Минор $U\begin{pmatrix} i_2 & \cdots & i_r \\ 2 & \cdots & r \end{pmatrix}$ состоит из членов, каждый из которых есть произведение $r-1$ элементов подматрицы, взятых из различных строк и столбцов. Поэтому каждый такой член содержит нулевой множитель, и минор $U\begin{pmatrix} i_2 & \cdots & i_r \\ 2 & \cdots & r \end{pmatrix}$ равен нулю. В справедливости этого утверждения также можно убедиться, если соответствующую матрицу представить в блочно-диагональном виде, хотя бы один блок которой имеет нулевой определитель.

2) Поскольку минор $U\begin{pmatrix} i_2 & \cdots & i_r \\ 2 & \cdots & r \end{pmatrix}$ отличен от нуля, согласно пункту 1), множество $\{i_2,\dots,i_r\}$ содержит по p_m-1 строк ($m=1,\dots,v$, v – число базовых бикомпонент) с каждой базовой бикомпоненты. Очевидно, что минор равен определителю блочно-диагональной матрицы, т.е.

$$U\begin{pmatrix} i_2 & \cdots & i_r \\ 2 & \cdots & r \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} B_1' & & \\ & \ddots & \\ & & B_v' \end{pmatrix},$$

где матрица B_i' получена из B_i вычеркиванием к-й строки и одного столбца. Согласно матричной теореме о деревьях, определитель матрицы B_i' равен минору любого элемента k-й строки B_i и его абсолютное значение равно сумме весов всех исходящих из вершины k деревьев i-й базовой бикомпоненты. Это рассуждение верно для любого блока B_t'.

Таким образом, абсолютное значение ненулевого минора $U\begin{pmatrix} i_2 & \cdots & i_r \\ 2 & \cdots & r \end{pmatrix}$ равно произведению весов множеств всех исходящих из вершин $\{1,\dots,n\}\backslash\{i_2,\dots,i_r\}$ деревьев.

Утверждение 4. Пусть $\{i_{m+1},\dots,i_{m+p}\}$ – множество вершин одной базовой бикомпоненты. Тогда $U\begin{pmatrix} i_{m+s}, & K_s \\ 1 & \cdots\ r \end{pmatrix}$ и $U\begin{pmatrix} & K_s & \\ 2 & \cdots & r \end{pmatrix}$ имеют один и тот же знак, и

$$\left|U\begin{pmatrix} i_1 & \cdots i_{m+1} \cdots i_{m+p} \cdots & i_r \\ & 1\ \cdots\ r & \end{pmatrix}\right| = \sum_{s=1}^{p}\left|U\begin{pmatrix} & K_s & \\ 2 & \cdots & r \end{pmatrix}\right|, \tag{7}$$

где $K_s = (i_1\ \cdots i_{m+1} \cdots i_{m+p} \cdots\ i_r)\ \backslash i_{m+s},\ s=1,\dots,p$.

Доказательство:

Не уменьшая общности, предположим, что вершины пронумерованы так, что $i_{m+s}=s, s=1,\dots,p$. Рассмотрим определитель $U\begin{pmatrix} 1\cdots p\ i_1 \cdots\ i_{r-p} \\ 1\ \cdots\ r \end{pmatrix}$ и представим его в блочном виде как

$$\det\begin{pmatrix} 1 & l_{12} & \cdots & l_{1p} & \mathbf{0}_{\mathbf{1},\boldsymbol{r-p}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & l_{p1} & \cdots & l_{pp} & \mathbf{0}_{\mathbf{1},\boldsymbol{r-p}} \\ \mathbf{1}_{\boldsymbol{r-p},\mathbf{1}} & \mathbf{0}_{\boldsymbol{r-p},\mathbf{1}} & \cdots & \mathbf{0}_{\boldsymbol{r-p},\mathbf{1}} & Q_{r-p} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} Q_p & \mathbf{0} \\ * & Q_{r-p} \end{pmatrix}.$$

Согласно матричной теореме о деревьях, алгебраическое дополнение первого элемента любой строки s матрицы Q_p равно сумме весов деревьев, исходящих из вершины s. Поэтому определитель матрицы Q_p равен сумме весов всех исходящих деревьев базовой бикомпоненты с множеством вершин $\{1,\dots,p\}$, а $\left|U\begin{pmatrix} 1\cdots p\ i_1 \cdots\ i_{r-p} \\ 1\ \cdots\ r \end{pmatrix}\right|$ – произведению суммы весов всех исходящих деревьев базовой бикомпоненты с вершинами $\{1,\dots,p\}$ на $|\det Q_{r-p}|$, который равен сумме весов максимальных исходящих лесов с вершинами $N\backslash\{\{i_1,\cdots,\ i_{r-p}\}\cup\{1,\dots,p\}\}$. Таким образом, выполняется равенство (7). С другой стороны, определитель подматрицы, полученной из матрицы Q_p

вычеркиванием первой строки и первого столбца матрицы Q_p, имеет такой же положительный знак, что и определитель Q_p.

Утверждение доказано.

Следующая теорема впервые была доказана в [11]. С помощью утверждений 3 и 4 приведем новое, более короткое доказательство.

Теорема 2. Сумма элементов первой строки матрицы U^+ равна 1:

$$\sum_{i_1 \in N} u^+_{1i_1} = 1.$$

Доказательство.

Пусть $N = \{N_1, \dots, N_v\}$ – разбиение множества вершин орграфа (агентов). Рассмотрим сумму элементов первой строки матрицы U^+:

$$\sum_{i_1 \in N} u^+_{1i_1} = \frac{\Sigma}{D},$$

где

$$D = \sum\nolimits_{k_1 < \dots < k_r} \left(U \begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_r \\ 1 & \cdots & r \end{pmatrix} \right)^2,$$

$$\Sigma = \left(\sum_{i_1 \in N_1} \sum_{i_2 < \dots < i_r} U \begin{pmatrix} i_2 & \cdots & i_r \\ 2 & \cdots & r \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix} + \dots + \sum_{i_1 \in N_v} \sum_{i_2 < \dots < i_r} U \begin{pmatrix} i_2 & \cdots & i_r \\ 2 & \cdots & r \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix} \right). \quad (8)$$

Согласно утверждению 4 для каждой базовой бикомпоненты B_i с вершинами N_i верно

$$\sum_{i_1 \in N_i} U \begin{pmatrix} i_2 & \cdots & i_r \\ 2 & \cdots & r \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix} = \left(U \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix} \right)^2.$$

Тогда из (8) получим

$$\Sigma = \sum_{i_2 < \dots < i_r} \left(\sum_{i_1 \in N_1} U \begin{pmatrix} i_2 & \cdots & i_r \\ 2 & \cdots & r \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix} + \dots + \sum_{i_1 \in N_v} U \begin{pmatrix} i_2 & \cdots & i_r \\ 2 & \cdots & r \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} \left(U \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix} \right)^2 = D.$$

Таким образом, мы установили, что

$$\sum_{i_1 \in N} u^+_{1i_1} = 1.$$

Заметим, что в числителе (6) каждое слагаемое отлично от нуля тогда, когда оба множителя отличны от нуля. Это возможно в том случае, когда $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ содержит все вершины только одной базовой бикомпоненты. Очевидно, что эта базовая бикомпонента должна содержать i_1, иначе, согласно п. 1) утверждения 4, $U \begin{pmatrix} i_2 & \cdots & i_r \\ 2 & \cdots & r \end{pmatrix} = 0$.

Итак, метод ортогональной проекции приводит к консенсусу при любом векторе начальных значений $x(0)$, и консенсус определяется произведением

$$(\pi_1, \dots, \pi_n)(x_1(0), \dots, x_n(0))^T,$$

где $\pi_i = u^+_{1i}$. Каждый член D равен квадрату произведения веса множества всех деревьев одной базовой бикомпоненты B_m на произведение весов деревьев с фиксированными корнями остальных базовых бикомпонент. (Далее это число обозначено через a_{mi}). Для каждой вершины i базовой бикомпоненты B_m с множеством вершин N_m число u^+_{1i} определяется следующим образом:

1) вычисляется вес множества всех максимальных исходящих лесов с фиксированным множеством корней $N' = \{i_1, \dots, i_{v-1}\}$, $N_m \cap N' = \emptyset$, где N' содержит по одному элементу с каждой базовой бикомпоненты;

2) вычисляется вес множества всех исходящих деревьев с корнями из N_m;

3) вычисляется вес множества деревьев, исходящих из i;

4) квадрат числа, полученного в п.1) умножается на произведение результатов, полученных в п. 2) и 3);

5) пункты 1)-4) выполняются для всевозможных множеств N' и складываются.

В частности, если орграф влияний содержит остовное дерево, то результат вычисления, полученный в п. 1) предполагается равным 1. Действительно, в этом случае матрица U будет квадратной невырожденной и, согласно (5), выполнится

$$u_{1i}^{+} = u_{1i}^{-1} = \frac{\left|U\begin{pmatrix}(1,\dots,n)\backslash i\\ 2\ \cdots\ n\end{pmatrix}\right|\det(U)}{(\det(U))^2} = \frac{\left|U\begin{pmatrix}(1,\dots,n)\backslash i\\ 2\ \cdots\ n\end{pmatrix}\right|}{\det(U)} = \frac{w_i}{w} = l_{1i}^{\vdash}.$$

Второе равенство справа следует из теоремы 1, согласно которой, $\left|U\begin{pmatrix}(1,\dots,n)\backslash i\\ 2\ \cdots\ n\end{pmatrix}\right|$ совпадает с алгебраическим дополнением любого элемента i-й строки лапласовской матрицы орграфа влияний.

Утверждение 5.

Если i и j принадлежат одной базовой компоненте, то $\frac{u_{1i}^{+}}{u_{1j}^{+}} = \frac{l_{1i}^{\vdash}}{l_{1j}^{\vdash}}$.

Доказательство. Справедливость данного утверждения следует из представления u_{1k}^{+}. Действительно, все соответствующие множители $U\begin{pmatrix}i_1\ i_2\cdots\ i_r\\ 1\ 2\cdots\ r\end{pmatrix}$ в выражении (6) для u_{1i}^{+} и u_{1j}^{+} отличаются только знаком, а $U\begin{pmatrix}i_2\cdots\ i_r\\ 2\cdots\ r\end{pmatrix}$ – весами исходящих деревьев из i и j.

Используя утверждение 4 и теорему 2, выражение для Σ можно представить как

$$\Sigma = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r}\left(U\begin{pmatrix}i_1\ i_2\cdots\ i_r\\ 1\ 2\cdots\ r\end{pmatrix}\right)^2 = \sum_{m=1}^{v}\sum_{i=1}^{q_m} a_{mi}^2,$$

где $q_m = (p_1p_2\cdots p_v)/p_m,\ m = 1,\dots,v$. Для каждой базовой бикомпоненты B_m с множеством вершин N_m число a_{mi} равно произведению веса множества всех деревьев в B_m на вес максимальных исходящих лесов остальных компонент с корнями $N\backslash\{\{i_2,\dots,i_r\}\cup N_m\}$.

Пусть $P_1 = \{1,\dots,p_1\}$ – множество вершин первой базовой бикомпоненты B_1. Согласно выражению (6),

$$W_1 = \sum_{s=1}^{p_1} u_{1s}^{+} = D^{-1}\sum_{s=1}^{p_1}\sum_{K_s} U\begin{pmatrix}K_s\\ 2\ \cdots\ r\end{pmatrix}U\begin{pmatrix}s\ K_s\\ 1\ 2\cdots\ r\end{pmatrix} =$$

$$= D^{-1}\sum_{i_{r-p_1}<\cdots<i_r}\left(U\begin{pmatrix}P_1\ i_{r-p_1}\cdots i_r\\ 1\ 2\cdots\ r\end{pmatrix}\right)^2 = D^{-1}\sum_{i=1}^{q_1} a_{1i}^2, \qquad (9)$$

где $K_s = \left(1\cdots p_1\ \ i_{r-p_1}\cdots\ i_r\right)\backslash s,\ s = 1,\dots,p_1$.

Напомним, что в (9) для каждой базовой бикомпоненты m число a_{mi} равно произведению веса множества всех деревьев одной базовой бикомпоненты B_m на произведение весов всех деревьев с фиксированными корнями из остальных базовых бикомпонент.

С помощью (9) можно определить отношение сумм весов в разных бикомпонентах:

$$\frac{W_i}{W_j} = \frac{\sum_{s=1}^{q_i} a_{is}^2}{\sum_{s=1}^{q_j} a_{js}^2}.$$

Итак, для любого протокола консенсуса существует тривиальный метод ортогональной проекции, порождающий данный процесс консенсуса. Справедливость этого утверждения следует из того факта, что для любого вектора стационарного распределения $(\pi_1,\dots,\pi_n)$ можно построить орграф влияний [13], содержащий остовное дерево, для Лапласовской матрицы L которого верно

$$\lim_{t\to\infty} e^{-Lt} = L^{\vdash} = 1(\pi_1,\dots,\pi_n).$$

Очевидно, в этом случае в качестве проектора можно использовать единичную матрицу.

Пример. Внизу приведена Лапласовская L, соответствующая матрица U и псевдообратная к U по Муру-Пенроузу U^{+}:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix};\ U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix};\ U^{+} = \frac{1}{470}\begin{pmatrix} 150 & 75 & 140 & 105 \\ -124 & 173 & -28 & -21 \\ -6 & -3 & -62 & 71 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что первая строка матрицы U^{+} положительная и сумма ее элементов равна 1. Очевидно, что для любого вектора начальных значений $x(0)$ консенсус определится произведением

$$\frac{1}{470}(150\ \ 75\ \ 140\ 105) \cdot \mathrm{x}(0).$$

Заключение

В работе был исследован метод ортогональной проекции, предложенный для регуляризации стохастической матрицы. Известно, что асимптотическое поведение всех основных протоколов описывается идемпотентной матрицей – собственным проектором лапласовской матрицы орграфа влияний. Если данная матрица – не регулярная, то для согласования характеристик используются различные методы регуляризации матрицы. Использование метода, аналогичного PageRank, приводит к обычному усреднению столбцовых элементов собственного проектора. Как в случае метода фоновых связей, при методе ортогональной проекции для получения консенсуса собственный проектор слева умножается на симметричный проектор. В статье приведена графовая интерпретация данного метода, и установлено, что при методе ортогональной проекции доля каждой базовой бикомпоненты в процессе регуляризации описывается весами максимальных исходящих лесов орграфа влияний. С помощью известного результата Мура (см., Приложении А в [12]) о поэлементном представлении псевдообратной матрицы удалось все числа, возникающие при вычислении, связать с весами максимальных исходящих лесов.

Литература

1. *Olfati-Saber R., Murray R. M.* Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays // IEEE Transactions on automatic control. Vol. 49. 2004, №. 9. – P. 1520-1533.
2. *Jadbabaie A, Lin J., Morse A.S.* Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules // IEEE Trans. Automat. Control. Vol. 48. 2003, №. 6. – P. 988-1001.
3. *Ren W., Beard R.W., McLain T.W.* Coordination variables and consensus building in multiple vehicle systems // Cooperative control. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2005. – С. 171-188.
4. *Чеботарев П. Ю. , Агаев Р. П.* Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов // Автоматика и телемеханика. 2009, № 3. – С. 136-151.
5. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* Матрица максимальных исходящих лесов орграфа и ее применения // Автоматика и телемеханика. 2000, № 9. – С. 15-43.
6. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* Остовные леса орграфа и их применение // Автоматика и телемеханика. 2001. № 3. – С. 108-133.
7. *Langville A. N., Meyer C. D.* Google's PageRank and beyond: The science of search engine rankings. – Princeton university press, 2011.
8. *Meilă M., Pentney W.* Clustering by weighted cuts in directed graphs // Proceedings of the 2007 SIAM international conference on data mining. – Society for Industrial and Applied Mathematics. 2007. – P. 135-144.
9. *Zhou D., Huang J., Schölkopf B.* Learning from labeled and unlabeled data on a directed graph // Proceedings of the 22nd international conference on Machine learning. 2005. – P. 1036-1043.
10. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* Модели латентного консенсуса // Автоматика и телемеханика. 2017, № 1. – С. 106–120.
11. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* Метод проекции в задаче о консенсусе и регуляризованный предел степеней стохастической матрицы // Автоматика и телемеханика. 2011, № 12. – С. 38-59.
12. *Ben-Israel A., Greville T.N.E.* Generalized inverses: theory and applications (Second Edition). –Springer Science & Business Media. 2003. – P. 420.
13. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* Представление дискретной процедуры согласования характеристик с помощью циклического орграфа // Автоматика и телемеханика. 2012, № 1. – С. 178-183.