

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ФОРМИРОВАНИЯ ПРОГРАММЫ С ВЗАИМОСВЯЗАННЫМИ ПРОЕКТАМИ И АЛГОРИТМ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Россихина Л.В., Болгова Е.В.

Воронежский институт ФСИН России, ул. Иркутская, 1а, г. Воронеж, Россия

rossihina_lv@mail.ru

Аннотация: В статье формализована задача включения проектов в программу с учетом дополнительного эффекта снижения затрат при совместной реализации взаимосвязанных проектов. Приведена постановка задачи. Предложен приближенный алгоритм решения, основанный на определении эффективности проекта. Применение алгоритма проиллюстрировано на примере.

Ключевые слова: проект, программа, эффект, затраты, эффективность, метод сетевого программирования.

Введение

Проект представляет некоторую задачу с известными исходными данными и требуемыми результатами, определяющими способ ее решения [1]. Проект включает замысел (постановку задачи), средства его реализации (алгоритм решения) и полученные результаты. Программа рассматривается как совокупность проектов.

Общая постановка задачи формирования программы приведена в работе [2].

Предложено n проектов для включения в программу, каждый из которых характеризуется затратами c_k и эффектом a_k – вклад k -го проекта. $x_k = 1$, если k -ый проект включен в программу, $x_k = 0$, если k -ый проект в программу не включен. Эффекты проектов от их реализации суммируются, что увеличивает суммарный эффект в результате реализации проектов на величину Δy .

$$\Delta y = \sum_k a_k \cdot x_k$$

Суммарные затраты на реализацию проектов составят:

$$C(x) = \sum_k c_k \cdot x_k$$

Для непересекающегося множества проектов решается задача о ранце:

$$C(x) = \sum_k c_k \cdot x_k \rightarrow \min$$

при ограничении

$$\sum_k a_k \cdot x_k \geq A,$$

где A - величина эффекта от реализации программы.

Научный интерес представляет формализация частных случаев задач управления проектами и разработка алгоритмов их решения [3, 4, 5, 6, 7].

В статье рассмотрена задача выбора проектов для включения в программу с учетом синергетического эффекта по затратам.

1 Постановка задачи

Постановка задачи: Имеем m проектов, для каждого проекта определены величина эффекта a_i и затраты на его реализацию c_i , $i = \overline{1, m}$. Определить проекты для включения в программу $x_i = 0, 1$, $i = \overline{1, m}$, максимизирующие суммарный эффект (1) при ограничении на затраты (2). Причем при включении в программу взаимосвязанных проектов x_i , x_j , $i \neq j$, дополнительно уменьшаются затраты на их реализацию на величину z_{ij} . C – затраты на реализацию программы.

$$\sum_i a_i \cdot x_i \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\sum_i c_i x_i - \sum_{i \neq j} z_{ij} x_i x_j \leq C. \quad (2)$$

Для решения применим метод сетевого программирования [8], идея которого заключается в сетевом представлении исходной задачи, преобразованной к виду суперпозиции простых задач, которые соответствуют вершинам сети. В вершинах решаются задачи оптимизации. В конечной вершине сети получается верхняя (нижняя) оценка для исходной задачи, если сетевое представление – дерево, то получается оптимальное решение исходной задачи.

Разделим z_{ij} произвольным образом на две части:

$$z_{ij} = p_{ij} + q_{ij} \quad (3)$$

при этом справедливо неравенство

$$z_{ij} x_i x_j \leq p_{ij} x_i + q_{ij} x_j.$$

С учетом (3) задача (1), (2) примет вид:

$$\sum_i a_i x_i \rightarrow \max, \quad (4)$$

$$\sum_i c_i x_i - \sum_{i \neq j} (p_{ij} x_i + q_{ij} x_j) \leq C. \quad (5)$$

Задача (4), (5) является оценочной. Для формальной записи оценочной задачи ориентируем произвольным образом ребра графа взаимозависимостей.

Пусть P_i – множество исходящих из вершины i дуг, Q_i – множество заходящих дуг.

После преобразований задача (4), (5) примет вид:

$$\sum_i a_i x_i \rightarrow \max, \quad (6)$$

$$\sum_i \left(c_i - \sum_{j \in P_i} p_{ij} - \sum_{j \in Q_i} q_{ij} \right) x_i \leq C. \quad (7)$$

$\Phi(p, q)$ – величина эффекта в оптимальном решении оценочной задачи (6), (7).

Теорема 1. Величина $\Phi(p, q)$ определяет верхнюю оценку для исходной задачи.

Доказательство. Предполагается, что все взаимосвязанные проекты включены в программу, и синергетический эффект уменьшения затрат использован полностью. С уменьшением затрат множество допустимых решений увеличивается. С увеличением множества допустимых решений получается не худшее решение.

Теорема 2. Если оптимальное решение оценочной задачи является допустимым для исходной задачи, то это решение является оптимальным решением для исходной задачи.

Доказательство. Полученная верхняя оценка для исходной задачи является допустимой. Если оценка сверху достигается на допустимом решении, то эта оценка является оптимальной.

Оценку можно улучшить, решив обобщенную двойственную задачу, которая заключается в выборе (p, q) , удовлетворяющих ограничению (3) и минимизирующих $\Phi(p, q)$.

2 Алгоритм решения

Для решения задачи выбора проектов с учетом синергетического эффекта по затратам предложен приближенный алгоритм, основанный на методе «затраты – эффект».

Для решения задачи выбора проектов с учетом синергетического эффекта по затратам предложим приближенный алгоритм, основанный на методе «затраты - эффект».

Метод «затраты - эффект» состоит в определении эффективности проекта, как отношения эффекта к величине затрат на реализацию проекта. Проекты упорядочиваются по убыванию значений эффективности. Для получения наибольшего эффекта сначала в программу включают проект с наибольшей эффективностью, затем следующий по эффективности и далее с учетом ограничений на затраты.

Наглядно эффективности проектов можно представить в виде графика (см. рис. 1).

Точность алгоритма определяется погрешностью метода «затраты – эффект», при большом числе проектов получается решение близкое к оптимальному.

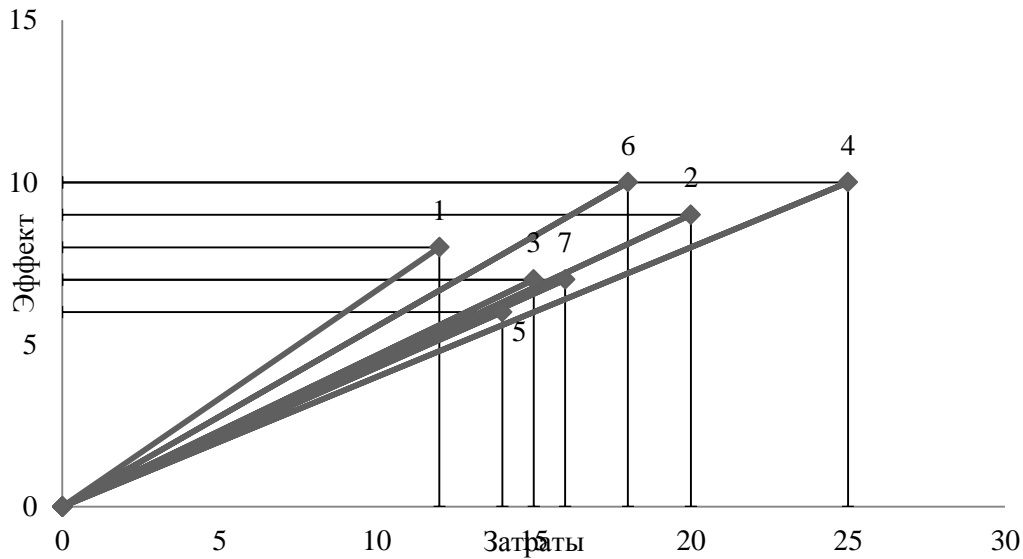


Рис. 1. Эффективность проектов

Алгоритм решения задачи формирования программы при наличии взаимосвязанных проектов:

Шаг 1. Определить величины p_{ij} и q_{ij} , решив уравнение

$$\frac{a_i}{c_i - p_{ij}} = \frac{a_j}{c_j - (z_{ij} - p_{ij})}, \text{ где } q_{ij} = z_{ij} - p_{ij}.$$

Вычислить эффективности взаимосвязанных проектов

$$\alpha_i = \frac{a_i}{c_i - \sum_{j \in P_i} p_{ij} - \sum_{j \in Q_i} q_{ij}},$$

$$\alpha_j = \frac{a_j}{c_j - \sum_{i \in P_j} p_{ij} - \sum_{i \in Q_j} q_{ij}}.$$

Шаг 2. Вычислить эффективности независимых проектов $\alpha_i = \frac{a_i}{c_i}$.

Шаг 3. Упорядочить проекты по убыванию эффективностей $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_m$.

Шаг 4. Выбрать проекты для включения в программу в полученной на шаге 2 очередности с учетом ограничений на затраты C .

Шаг 5. Вычислить величину эффекта.

3 Результаты

Пример. Данные о семи проектах для включения в программу представлены в таблице 1, причем проекты 1 и 6 при совместном включении в программу дают снижение затрат на величину $z_{ij}=10$. Ограничение на суммарные затраты составляет $C=95$.

Таблица 1. Данные о проектах

i	1	2	3	4	5	6	7
a_i	8	9	7	10	6	10	7
c_i	12	20	15	25	14	18	16

Шаг 1. Рассмотрим взаимосвязанные проекты 1 и 6.

Вычислим эффективность проектов

$$\alpha_1 = \frac{8}{12} \approx 0,7; \quad \alpha_6 = \frac{10}{18} \approx 0,6.$$

Пусть $p_{16} = z_{16} = 10$, тогда

$$\alpha_1 = \frac{8}{12-10} = 4 > \alpha_6.$$

Выбираем $p_{16} = 3$ и $q_{16} = 7$, при этом $\alpha_1 = \alpha_6 \approx 0,9$.

Шаг 2. Вычисляем эффективности независимых проектов (см. табл. 2)

Таблица 2. Значение эффективности независимых проектов

i	1	2	3	4	5	6	7
α_i	0,9	0,45	0,5	0,4	0,42	0,9	0,44

Шаг 3. Упорядочиваем проекты по не возрастанию

$$\alpha_1 \geq \alpha_6 \geq \alpha_3 \geq \alpha_2 \geq \alpha_7 \geq \alpha_5 \geq \alpha_4.$$

На рисунке 2 приведен график «затраты-эффект».

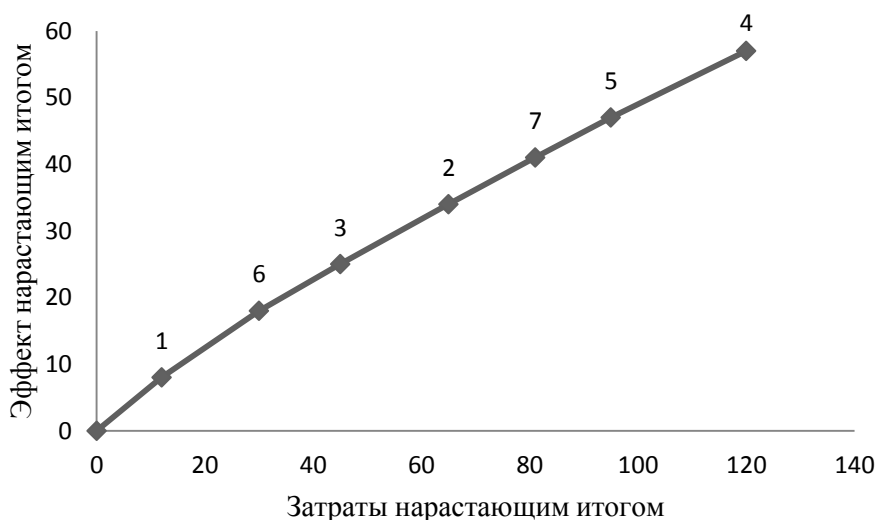


Рис. 2. График «затраты – эффект»

Шаг 4. Отбираем в программу проекты с учетом $C=95$: 1, 6, 3, 2, 7, 5.

Шаг 5. Величина эффекта равна 47, при этом экономия ресурса составила 10 единиц.

Заключение

В работе рассмотрена задача формирования программы с учетом взаимосвязанных проектов, совместная реализация которых дает синергетический эффект по затратам. Предложена постановка задачи выбора проектов для включения в программу, обеспечивающих максимальный суммарный эффект с учетом ограничений на затраты и дополнительного их уменьшения при наличии взаимосвязанных проектов. Получена оценочная задача, преобразованная в задачу целочисленного линейного программирования, решением которой является верхняя оценка исходной задачи.

Предложен приближенный алгоритм решения, основанный на определении эффективности проекта. Точность алгоритма определяется погрешностью метода «затраты - эффект». Алгоритм апробирован на примере, приведенном в статье.

Литература

1. A guide to the project management body of Knowledge (PMBOK guide) / Project Management Institute. 2017. – <https://www.PMI.org>
2. *Россихина Л.В.* Модели и методы планирования в органах и учреждениях уголовно-исполнительной системы : монография. – Воронеж: Научная книга, 2014. – 200 с.
3. *Бурков В.Н., Новиков Д.А., Щепкин А.В.* Механизмы управления эколого-экономическими системами. – М.: Физматлит, 2008. – 243 с.
4. *Буркова И.В., Половинкина А.И., Семенов П.И.* Задачи оптимизации программ развития по стоимости // Известия Тульского государственного университета. 2005, Вып. 8. – С. 120-127.
5. *Hartmann S., Kolisch R.* Experimental investigation of heuristics for resource-constrained project scheduling // European Journal of Operational Research. 2006, 174 (1). - P. 23-37.
6. *Mori M., Tseng C.* A genetic algorithm for the multi-mode resource-constrained project scheduling problem // European Journal of Operational Research. 2007, 100. – P. 134-141.
7. *Kalach A.V., Rossihina L.V., Melnik A.A., Sharapov S.V., Loran N.M.* Scheduling of the Independent Project // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Krasnoyarsk Science and Technology City Hall of the Russian Union of Scientific and Engineering Associations. Krasnoyarsk, Russia, 2020. С. 52050.
8. *Бурков В.Н., Буркова И.В.* Метод сетевого программирования в управлении целевыми программами // Автоматика и телемеханика. 2014, № 3. – С. 73-86.