СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ИГРАХ С ПРИРОДОЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ИНВЕСТИЦИОННОМ МЕНЕДЖМЕНТЕ

Горелик В.А.[1], Золотова Т.В.[2]

[1]ВЦ ФИЦ ИУ РАН, МПГУ,Россия, г. Москва, ул. Вавилова д.40

[2]Финансовый университет при Правительстве РФ, Россия, г. Москва, Ленинградский пр. д.49

[1]gorelik@ccas.ru, [2]tgold11@mail.ru

Аннотация: Предлагается принцип оптимальности при принятии решений в играх с природой, основанный на оценках эффективности и риска. В отличии от традиционного подхода к определению смешанной стратегии в теории игр, в данной работе учитывается возможность корреляционной зависимости случайных значений выигрышей для исходных альтернатив.

Ключевые слова: управление риском, принцип оптимальности, двухкритериальный подход, математическое ожидание, среднеквадратическое отклонение.

Введение

В реальных процессах принятия решений в сложных системах лицо принимающее решение (ЛПР) действует в условиях неполной информации относительно будущего состояния системы и, следовательно, результатов своей деятельности [1]. Математическая модель подобных ситуаций иногда называется «игрой с природой», а учет неопределенности и нейтрализация связанных с ней потерь при выборе решения называется управлением риском. При этом в зависимости от имеющейся у ЛПР информации о состояниях природы и его отношения к риску необходимо определить принцип оптимальности, т.е. отображение множества всех стратегий в некоторое его подмножество. Случай вероятностной неопределенности, когда имеется информация о вероятностях состояния природы, будем называть принятием решений в стохастических условиях.

Авторы ряда работ по принятию решений (см., например, [2-4]) предлагают ЛПР использовать для анализа экономических задач только один из известных в теории игр с природой критериев оптимальности (Вальда, Сэвиджа, Гурвица, Байеса). При таком подходе, с одной стороны, получается решение в чистых стратегиях, что не всегда соответствует предпочтениям ЛПР, а, с другой стороны, не учитывает риск, как одну из важных составляющих моделирования экономической ситуации. Как известно, критерии Вальда, Гурвица, Байеса предполагают максимизацию только значение выигрыша, а критерий Сэвиджа – минимизацию потерь.

Применение математических методов при принятии решений с учетом риска также рассматривалось рядом авторов (см., например, [5-18]). Остановимся на некоторых работах, в которых аппарат теории «игр с природой» описывает оптимизационные модели управления риском. В работе [7] экономические задачи управления риском решаются на основе использования линейной свертки критериев Вальда и Сэвиджа. В статье [6] предлагается принцип гарантированного результата (принцип минимакса), а также оценка риска по Сэвиджу в задачах нахождения оптимальной стратегии. В статье [5] излагался двухкритериальный подход «эффективность – риск» к определению принципа оптимальности при принятии решений в стохастических условиях. В качестве оценки эффективности использовалось математическое ожидание выигрыша, а в качестве оценки риска – функция VAR. Эта функция определяется как вероятность события, при котором выигрыш ЛПР не больше некоторого порогового значения, выступающего в качестве аргумента. Функция VAR и дисперсия являются наиболее широко используемыми величинами в качестве оценки риска (см, например, [9-18]). В данной работе мы используем среднеквадратическое отклонение (СКО) и дисперсию.

Итак, исследуются вопросы принятия решений в условиях стохастической неопределенности. В качестве математической модели рассматривается игра с природой с известными вероятностями состояний. Предлагается подход к определению принципов оптимальности при принятии решений в играх с природой, основанный на сочетании оценок эффективности и риска.

В статье [19] излагался двухкритериальный подход «эффективность – риск» к определению принципа оптимальности при принятии решений в стохастических условиях. В качестве оценки эффективности использовалось математическое ожидание выигрыша, а в качестве оценки риска - среднеквадратическое отклонение (СКО). Рассматривались постановки задач оптимизации как в чистых, так и смешанных стратегиях. Если при известных состояниях природы максимизируют математическое ожидание выигрыша, то использование смешанной стратегии не имеет смысла. При двухкритериальном же подходе оптимальный результат в смешанных стратегиях, вообще говоря, больше, чем в чистых. Смешанная стратегия в задаче инвестирования может интерпретироваться как распределение средств в разные финансовые инструменты (портфель ценных бумаг). При этом в модели работы [19] предполагалось отсутствие коррелированности случайных доходностей для различных чистых стратегий.

В отличии от традиционного подхода к определению смешанной стратегии в теории игр, в данной работе учитывается возможность корреляционной зависимости случайных значений выигрышей исходных альтернатив. Отметим, что учет коррелированности становится существенным именно при двухкритериальном подходе. Обычно в играх с природой в качестве критерия рассматривается либо математическое ожидание выигрыша, либо риск по Сэвиджу. В таком случае возможная коррелированность случайных выигрышей при разных чистых стратегиях никакой роли не играет. При наличии двух критериев, в качестве одного из которых выступает СКО, учет коррелированности существенным образом влияет на постановку задачи и метод ее решения. Соответственно полученные ранее результаты в данной работе будут обобщены на случай учета коррелированности случайных выигрышей для каждой пары чистых стратегий.

Рассматривается ситуация, когда ЛПР может выбирать одну из стратегий (альтернатив) $i = 1, \dots, n$, при известном наборе возможных вариантов состояний внешней среды (природы) $j = 1, \dots, m$. Выигрыш от i-го решения при j-м состоянии внешней среды есть a_{ij}. В частности, в задачах фондового инвестирования, которые будут рассматриваться в качестве приложений, это могут быть доходности финансовых инструментов при различных сценариях развития. Матрица выигрышей от реализации возможных решений есть $A = \|a_{ij}\|$. Вероятности состояний природы q_j будем считать известными.

ЛПР необходимо выбрать ту стратегию, которая приведет по возможности к большему выигрышу, но при этом возможные потери вследствие неоднозначности исхода из-за неполноты информации будут как можно меньше. Эти критерии, как правило, противоречивы, т.е. чем более эффективен способ инвестиций, тем он более рискован. Поэтому выбор принципа оптимальности основан на некотором компромиссе между ними.

Соответствующие задачи принятия решений формализуются на основе принципов векторной оптимизации. Далее рассматривается одна из возможных постановок двухкритериальной задачи принятия решений в условиях риска, а именно, СКО как оценка риска переводится в ограничение. В результате получается задача обобщенного квадратичного программирования, для решения которой получен аналитический метод. Указанный подход реализован на примере процесса инвестирования с использованием реальных статистических данных.

1 Задача на максимум эффективности при ограничении по риску

Итак, в качестве оценки эффективности чистой стратегии i примем математическое ожидание выигрыша $\bar{a}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j$, а в качестве оценки риска - СКО $\sigma_i = \left(\sum_{j=1}^{m} \left(a_{ij} - \bar{a}_i\right)^2 q_j\right)^{0.5}$.

При использовании смешанной стратегии $\bar{a}_i$ есть условное математическое ожидание выигрыша при реализации i-й чистой стратегии. Обозначим через p_i вероятность выбора i-й чистой стратегии. Тогда математическое ожидание выигрыша при использовании стратегии $p = (p_1, \dots, p_n)$ есть $\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i p_i$.

Пусть σ_{ik} – ковариационные моменты случайных величин выигрышей для чистых стратегий i и k, которые определяются по формулам $\sigma_{ik} = \sum_{j=1}^{m} \left(a_{ij} - \bar{a}_i\right)\left(a_{kj} - \bar{a}_k\right) q_j$. Обозначим ковариационную матрицу $D = \|\sigma_{ik}\|$. Как известно, ковариационная матрица всегда неотрицательно определена. Мы в дальнейшем будем предполагать несколько большее, а именно, что она положительно определена.

СКО случайной величины выигрыша при использовании стратегии $p = (p_1, \dots, p_n)$ в случае наличия коррелированности определяется, очевидно, по формуле $\sigma = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik} p_i p_k\right)^{0.5}$ или в матрично-векторной форме $\sigma = \langle p, Dp \rangle^{0.5}$, где $\langle \cdot,\cdot \rangle$ - знак скалярного произведения векторов.

Введем n-мерные вектора $\bar{a} = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ и $e = (1, \dots, 1)$, тогда постановка задачи на максимум математического ожидания выигрыша при ограничении сверху на СКО имеет вид:

$$max_{p \in P} \langle \bar{a}, p \rangle, \;\; P = \{p | \langle p, Dp \rangle^{0.5} \le \sigma_0, \;\; \langle p, e \rangle = 1, \;\; p \ge 0\}. \qquad (1)$$

Множество P не пусто, если пороговое значение σ_0 не меньше минимального значения СКО на множестве $P_0 = \{p \mid \langle p, e\rangle = 1,\ p \geq 0\}$. Для нахождения этого значения надо решить вспомогательную задачу квадратичного программирования:

$$d_0 = \min_{p \in P_0} \langle p, Dp\rangle, \quad P_0 = \{p \mid \langle p, e\rangle = 1,\ p \geq 0\}. \qquad (2)$$

Составим функцию Лагранжа $L_0(p,\mu) = \frac{1}{2}\langle p, Dp\rangle + \langle \mu, 1 - \langle p, e\rangle\rangle$. Условия экстремума Каруша-Куна-Таккера (ККТ) для задачи квадратичного программирования (2) имеют вид $\frac{\partial L_0(p,\mu)}{\partial p_i} = 0, i \in I, \frac{\partial L_0(p,\mu)}{\partial p_i} \geq 0, i \notin I$, где I – множество индексов, соответствующих ненулевым p_i.

Для ненулевых компонент вектора p имеем систему уравнений: $\widetilde{D}\tilde{p} - \mu\tilde{e} = 0$, где $\widetilde{D}$ – квадратная подматрица матрицы D, полученная вычеркиванием строк и столбцов с номерами, соответствующим нулевым компонентам вектора p, $\tilde{p}$ – вектор из ненулевых компонент вектора p, $\tilde{e}$ – вектор из части компонент вектора e, полученный вычеркиванием компонент с номерами, соответствующим нулевым компонентам вектора p.

Квадратные подматрицы положительно определенной матрицы D также являются положительно определенными и, следовательно, невырожденными. Поэтому $\tilde{p} = \mu\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}$ и из ограничения имеем $\mu\langle\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}, \tilde{e}\rangle = 1$. Матрица $\widetilde{D}^{-1}$ также положительно определена, поэтому $\mu = \langle\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}, \tilde{e}\rangle^{-1}$ и

$$\tilde{p} = \langle\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}, \tilde{e}\rangle^{-1}\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}. \qquad (3)$$

Отметим, что для данного случая условия ККТ являются необходимыми и достаточными. Поэтому если $\tilde{p} \geq 0$ и выполнено остальная часть условий ККТ, а именно, неотрицательность производных функции Лагранжа по p_i с номерами, соответствующим нулевым компонентам, то вектор $\tilde{p}$, дополненный нулями на соответствующих местах, является решением задачи (2). Подставив этот вектор в целевую функцию (2), получаем значение $d_0 = \langle\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}, \tilde{e}\rangle^{-1}$.

Таким образом, метод решения задачи (2) сводится к перебору квадратных подматриц матрицы D, решении основанных на них систем уравнений по полученным формулам и проверке условий неотрицательности компонент полученных векторов и соответствующих производных функции Лагранжа. При этом так как условия ККТ являются необходимыми и достаточными, то перебор останавливается, как только найдена удовлетворяющая им точка.

В дальнейшем будем считать, что все $\bar{a}_i$ различны. Это не нарушает общности рассмотрения, так как если две стратегии имеют одинаковые математические ожидания выигрыша, то в случае равенства и СКО они в рамках данного подхода эквивалентны и одну из них можно исключить, а в случае, когда одна из них имеет большее СКО, то в рамках данного подхода она не может входить в оптимальную стратегию с не нулевым весом. Следующая теорема обосновывает метод нахождения оптимальных истинно смешанных (содержащих не менее двух ненулевых компонент) стратегий.

Теорема 1. Если $\sigma_0 > d_0^{0.5}$, все $\bar{a}_i$ различны, матрица $D = \|\sigma_{ik}\|$ положительно определена, то задача (1) имеет решение p^0 и истинно смешанная оптимальная стратегия может быть представлена в виде

$$\tilde{p}^0 = {\lambda^0}^{-1}\widetilde{D}^{-1}(\tilde{a} - \mu^0\tilde{e}), \qquad (4)$$

где

$$\lambda^0 = \sqrt{\frac{\langle\tilde{a},\widetilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle\langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle - \langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle^2}{\sigma_0^2\langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle - 1}}, \quad \mu^0 = \frac{\langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle - \lambda^0}{\langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle}, \qquad (5)$$

$\widetilde{D}$ – некоторая квадратная подматрица матрицы D, полученная вычеркиванием строк и столбцов с одинаковыми номерами, $\tilde{p}^0$ – вектор из ненулевых компонент вектора p^0, $\tilde{a}$ – вектор из части компонент вектора $\bar{a}$, $\tilde{e}$ – вектор из части компонент вектора e, полученные вычеркиванием компонент с номерами, соответствующим нулевым компонентам вектора p^0.

Доказательство. При $\sigma_0 > d_0^{0.5}$ множество P не пусто, замкнуто и ограничено, поэтому задача выпуклого программирования (1) имеет решение и удовлетворяет условию Слейтера, а условия ККТ для нее являются необходимыми и достаточными. В задаче (1) для применения условий экстремума удобнее первое ограничение возвести в квадрат. Тогда функция Лагранжа имеет вид

$$L_1(p,\lambda,\mu)=\langle\bar{a},p\rangle+\frac{1}{2}\lambda(\sigma_0^2-\langle p,Dp\rangle)+\langle\mu,1-\langle p,e\rangle\rangle,\ \lambda\geq 0.$$

Пусть, как и прежде, I – множество индексов, соответствующих ненулевым p_i. Условия экстремума ККТ для задачи (1) имеют вид $\frac{\partial L_1(p,\lambda,\mu)}{\partial p_i}=0, i\in I, \frac{\partial L_1(p,\lambda,\mu)}{\partial p_i}\leq 0, i\notin I$.

Для ненулевых компонент вектора p имеем систему уравнений: $\tilde{a}-\lambda\widetilde{D}\tilde{p}-\mu\tilde{e}=0$, где $\widetilde{D}$ – квадратная подматрица матрицы D, полученная вычеркиванием строк и столбцов с номерами, соответствующими нулевым компонентам вектора p, $\tilde{p}$ – вектор из ненулевых компонент вектора p, $\tilde{a}$ – вектор из части компонент вектора $\bar{a}$, $\tilde{e}$ – вектор из части компонент вектора e, полученные вычеркиванием компонент с номерами, соответствующим нулевым компонентам вектора p.

Если λ=0, то имеем $\tilde{a}-\mu\tilde{e}=0$. Но в силу предположения теоремы о том, что все $\bar{a}_i$ различны это равенство возможно только для одного индекса, т.е. в данном случае условия оптимальности могут выполняться только для множества I, содержащего один индекс. Если квадратичное ограничение в задаче (1) не является активным, то λ=0. Поэтому для истинно смешанной оптимальной стратегии, у которой хотя бы две компоненты отличны от нуля, квадратичное ограничение в (1) должно быть активным и $\lambda>0$.

Как было сказано выше, квадратные подматрицы положительно определенной матрицы D также являются положительно определенными и, следовательно, невырожденными. Поэтому имеем $\tilde{p}=\lambda^{-1}\widetilde{D}^{-1}(\tilde{a}-\mu\tilde{e})$. Подставляем это выражение в ограничения задачи (1):

$$\langle\widetilde{D}^{-1}(\tilde{a}-\mu\tilde{e}),(\tilde{a}-\mu\tilde{e})\rangle=\lambda^2\sigma_0^2,\qquad \lambda^{-1}\langle\widetilde{D}^{-1}(\tilde{a}-\mu\tilde{e}),\tilde{e}\rangle=1.$$

Преобразуем первое равенство к виду

$$\langle\tilde{a},\widetilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle+\mu^2\langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle-2\mu\langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle=\lambda^2\sigma_0^2.$$

Из второго равенства выразим $\mu=(\langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle-\lambda)\langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^{-1}$ и подставим в первое:

$$\langle\tilde{a},\widetilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle\langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle+\langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle^2-2\lambda\langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle+\lambda^2-2\left(\langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle^2-\lambda\langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle\right)=\lambda^2\sigma_0^2\langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle.$$

В этом выражении коэффициент при λ равен нулю. Таким образом, получаем квадратное уравнение относительно λ:

$$\lambda^2\left(\sigma_0^2\langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle-1\right)=\langle\tilde{a},\widetilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle\langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle-\langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle^2. \qquad (6)$$

Покажем, что свободный член положителен, т.е. имеет место неравенство

$$\langle\tilde{a},\widetilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle\langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle-\langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle^2>0.$$

Дествительно, так как $\widetilde{D}^{-1}$ является положительно определенной матрицей, то существует такая невырожденная матрица B, что $\widetilde{D}^{-1}=B^TB$. Подставив это разложение матрицы в правую часть квадратного уравнения (6), имеем $\langle\tilde{a},B^TB\tilde{a}\rangle\langle\tilde{e},B^TB\tilde{e}\rangle-\langle\tilde{e},B^TB\tilde{a}\rangle^2=\langle B\tilde{a},B\tilde{a}\rangle\langle B\tilde{e},B\tilde{e}\rangle-\langle B\tilde{e},B\tilde{a}\rangle^2$. Применим неравенство Коши-Буняковского: $\langle x,y\rangle^2\leq\|x\|^2\cdot\|y\|^2$, положив $x=B\tilde{a}$, $y=B\tilde{e}$. В неравенстве Коши-Буняковского имеет место равенство только в случае коллинеарности векторов x и y. Но вектора $B\tilde{a}$ и $B\tilde{e}$ не могут быть коллинеарными, т.к. в противном случае при умножении их на матрицу B^{-1} вектора $\tilde{a}$ и $\tilde{e}$ оказываются тоже коллинеарными. Это противоречит условию теоремы, т.к. по предположению все $\bar{a}_i$ различны, а все компоненты вектора e равны единицам. Поэтому при наличии не менее двух компонент у этих векторов правая часть уравнения (6) положительна.

Покажем, что коэффициент при λ^2 тоже положителен. Для этого воспользуемся полученным выше видом решения задачи (2). Если решить аналогичную задачу на минимум дисперсии с ковариационной матрицей $\widetilde{D}$, соответствующей решению задачи (1), получим минимальное значение дисперсии $\langle\widetilde{D}^{-1}\tilde{e},\tilde{e}\rangle^{-1}$. По предположению теоремы σ_0^2 больше этого значения, т.е. $\sigma_0^2>\langle\tilde{e},\widetilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^{-1}$. С учетом того, что $\lambda>0$, λ является решением уравнения (6) со знаком плюс перед радикалом.

Если $\tilde{p} \geq 0$ и выполнено остальная часть условий ККТ, а именно, неположительность производных функции Лагранжа по p_i с номерами, соответствующим нулевым компонентам, то вектор $\tilde{p}$, дополненный нулями на соответствующих местах, является решением задачи (1).

В результате получаем формулы (4) и (5). Теорема доказана.

2 Практический пример инвестиционного менеджмента

Рассмотрим применение полученных результатов на примере процесса инвестирования на фондовом рынке. Обычно смешанная стратегия интерпретируется как вектор долей финансовых инструментов в составе портфеля. Не исключая такую интерпретацию, предложим и несколько иную точку зрения. Инвестор, как правило, формирует портфель не одномоментно, а как последовательный процесс покупки того или иного финансового актива. В таком случае смешанная стратегия может реализовываться в своем имманентном смысле, т.е. покупки осуществляются случайным образом с распределением, определяемым найденным ранее оптимальным решением. Если этот процесс достаточно длительный, то структура портфеля будет приблизительно соответствовать виду смешанной стратегии.

Проведем технический анализ и найдем оптимальную стратегию инвестирования, используя реальные данные о котировках акций российских компаний за период с 01.02.2021 по 01.05.2021.

Были выбраны три относительно успешные компании, а именно, ПАО «Банк ВТБ» (VTBR), ПАО «Газпром» (SAGP), ПАО «Сбербанк России» (SBER).

На рис. 1 приведены значения цен закрытия акций всех рассматриваемых компаний за указанный период, экспортированных в файл Excel (данные взяты с сайта Инвестиционной компании «ФИНАМ» [20]). На основании данных о ежедневных ценах закрытия рассчитаны ежедневные значения доходностей компаний, средние значения доходностей, дисперсии, и ковариации за данный период (они также приведены на рис. 1).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		VTBR	GAZP	SBER		VTBR	GAZP	SBER
2	<DATE>	<CLOSE>	<CLOSE>	<CLOSE>		**доходности акций**		
3	20210201	0,036945	214,66	263,8		0	-0,001118	-0,002464
4	20210202	0,036945	214,42	263,15		0,0014887	0,01716258	0,00144404
5	20210203	0,037	218,1	263,53		0,01027027	0,00774874	0,02496869
6	20210204	0,03738	219,79	270,11		0,0135099	0,01010055	0,00588649
7	20210205	0,037885	222,01	271,7		0,01055827	0,02698077	0,01288185
8	20210208	0,038285	228	275,2		-0,0125375	-0,0011842	-0,0226017
9	20210209	0,037805	227,73	268,98		-0,0115064	-0,0197163	-0,0114507
10	20210210	0,03737	223,24	265,9		0,00267594	-0,0084662	-0,004513
60	20210422	0,048	230,93	292,18		0,07	0,00731823	0,00345677
61	20210423	0,05136	232,62	293,19		-0,0008762	0,0026223	0,00709438
62	20210426	0,051315	233,23	295,27		-0,0003897	-0,0052738	0,01093914
63	20210427	0,051295	232	298,5		-0,0188127	0,00413793	-3,35E-05
64	20210428	0,05033	232,96	298,49		-0,006358	-0,0105168	-0,0046568
65	20210429	0,05001	230,51	297,1		0,03179364	0,00377424	0,0021205
66	20210430	0,0516	231,38	297,73				
67								
68					**мат.ожидания**	0,00547919	0,00127111	0,00200325
69								
70					**ковар.матрица**	0,00033635	0,00010007	9,5222E-05
71						0,00010007	0,00016271	9,3955E-05
72						9,5222E-05	9,3955E-05	0,00016446
73								

Рис. 1. Котировки акций акционерных обществ «Банк ВТБ», «Газпром», «Сбербанк России» и их статистические характеристики

Стратегия 1 – вложение в акции компании «Банк ВТБ», стратегия 2 – вложение в акции компании «Газпром», стратегия 3 – вложение в акции компании «Сбербанк России». Средние значения доходностей при этом равны $\bar{a}_1 = 0.00548$ (0.548%), $\bar{a}_2 = 0.00127$ (0.127%), $\bar{a}_3 = 0.002$ (0.2%),

ковариационная матрица имеет вид $D = \begin{pmatrix} 0.00034 & 0.00010 & 0.000095 \\ 0.00010 & 0.00016 & 0.000094 \\ 0.000095 & 0.000094 & 0.00017 \end{pmatrix}$.

Найдем сначала минимальное значение дисперсии d_0, решив задачу (2).

Для исходной матрицы D, имеем

$D^{-1} = \begin{pmatrix} 3815.458 & -1597.97754 & -1296.22457 \\ -1597.97754 & 9840.62394 & -4696.6592 \\ -1296.22457 & -4696.6592 & 9514.1783 \end{pmatrix}$, $\langle e, D^{-1}e \rangle = 7988.538$. По формуле (3), получаем

$$p = 7988.538^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3815.458 & -1597.97754 & -1296.22457 \\ -1597.97754 & 9840.62394 & -4696.6592 \\ -1296.22457 & -4696.6592 & 9514.1783 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Откуда решением задачи (2) является стратегия $p = (0.11532, 0.44388, 0.44079)$, а соответствующее ей минимальное значение целевой функции есть $d_0 = 0.00013$.

Решим задачу (1) при пороговом значении СКО $\sigma_0 = 0.014$ (или дисперсии $\sigma_0^2 = 0.0002$).

Приведем для наглядности подробную процедуру решения этой задачи с использованием формул (4) и (5).

Возьмем I={1, 2, 3}, т.е. будем использовать исходный вектор ожидаемых доходностей $\bar{a} = (0.00548, 0.00127, 0.002)$ и исходную ковариационную матрицу D, тогда получаем $\langle \bar{a}, D^{-1}\bar{a} \rangle = 0.093993$, $\langle e, D^{-1}\bar{a} \rangle = 16.60911$. По формулам (5) имеем

$$\lambda = \sqrt{\frac{0.093993 \cdot 7988.538 - 16.60911^2}{0.0002 \cdot 7988.538 - 1}} = 28.1906, \quad \mu = \frac{16.60911 - 28.19068}{7988.538} = -0.00145.$$

Используя формулу (4), имеем

$$p = 28.19068^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3815.458 & -1597.97754 & -1296.22457 \\ -1597.97754 & 9840.62394 & -4696.6592 \\ -1296.22457 & -4696.6592 & 9514.1783 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0.00548 \\ 0.00127 \\ 0.002 \end{pmatrix} + 0.00145 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Откуда $p = (0.62479, -0.01826, 0.39346)$. Условие неотрицательности $p \geq 0$, в данном случае не выполняется, значит, данный вектор p решением не является. Так как при этом p_2 отрицательное, то можно предположить, что оптимальная смешанная стратегия содержит вторую нулевую компоненту.

Поэтому возьмем I={1, 3}, тогда $\tilde{a} = (0.00548, 0.002)$, $\widetilde{D} = \begin{pmatrix} 0.00034 & 0.000095 \\ 0.000095 & 0.00017 \end{pmatrix}$, $\widetilde{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 3555.969551 & -2058.89531 \\ -2058.89531 & 7272.59202 \end{pmatrix}$, $\langle \tilde{a}, \widetilde{D}^{-1}\tilde{a} \rangle = 0.090743$, $\langle \tilde{e}, \widetilde{D}^{-1}\tilde{e} \rangle = 6710.771$, $\langle \tilde{e}, \widetilde{D}^{-1}\tilde{a} \rangle = 18.64708$ и по формулам (5) получаем

$$\lambda = \sqrt{\frac{0.090743 \cdot 6710.771 - 18.64708^2}{0.0002 \cdot 6710.771 - 1}} = 27.63183, \quad \mu = \frac{18.64708 - 27.63183}{6710.771} = -0.00134.$$

Используя формулу (4), имеем вектор ненулевых компонент

$$\tilde{p} = 27.631838^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3555.969551 & -2058.89531 \\ -2058.89531 & 7272.59202 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0.00548 \\ 0.002 \end{pmatrix} + 0.00134 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) =$$

Откуда $\tilde{p} = (0.62840, 0.37161)$.

Проверим выполнение условия ККТ для вычеркнутого номера $i = 2$. Производная функции Лагранжа по p_2 есть

$$\frac{\partial L_1(p,\lambda,\mu)}{\partial p_2} = \bar{a}_2 - \lambda \sum_{k=1}^{3} \sigma_{2k} p_k - \mu.$$

При подстановке вектора $(0.62840, 0, 0.37161)$ и множителей Лагранжа $\lambda = 27.63183$ и

$\mu = -0.00134$ она равна

$$\frac{\partial L_1(p,\lambda,\mu)}{\partial p_2} = 0.00127 - 27.63183(0.00010 \cdot 0.62840 + 0.00016 \cdot 0 + 0.000094 \cdot 0.37161) + 0.00134.$$

Откуда $\frac{\partial L_1(p,\lambda,\mu)}{\partial p_2} = -0.00009$. Значит все условия ККТ выполнены и оптимальное решение задачи (1) имеет вид $p^0 = (0.62840, 0, 0.37161)$.

В работе [19] рассматривался пример инвестирования в акции российских компаний за период с 01.10.2019 по 31.12.2019. Анализ статистических данных показывал, что значения ковариаций доходностей рассматриваемых компаний был на порядок меньше значений их дисперсий. Учет ковариаций практически не сказывался на результатах расчетов, поэтому правомерно было допущение о том, что ими можно пренебречь.

В рассмотренном выше примере с данными о котировках акций российских компаний за период с 01.02.2021 по 01.05.2021 ковариации и дисперсии имеют примерно одинаковый порядок, причем ковариации являются положительными. Можно предположить, что это связано с восстановительным ростом после пика пандемии.

Если в данном примере пренебречь ковариациями, то имеем следующие результаты.

Решив задачу (1) без учета ковариаций при том же пороговом значении СКО, получаем решение задачи (1) $p = (0.75124, 0, 0.24876)$. Как видно структура стратегии не изменилась, но значения первой и третьей компонент существенно отличаются от этих значений вектора $p^0 = (0.62840, 0, 0.37161)$.

Таким образом, идея учета ковариации случайных выигрышей разных чистых стратегий в играх с природой при нахождении оптимальной смешанной стратегии имеет основание. Конечно, в портфельном анализе эта идея не является новой, но игры с природой могут являться моделями и для других задач менеджмента.

Заключение

Понятие принципа оптимальности в задачах принятия решений в условиях неполной информации является весьма неоднозначным. ЛПР должен иметь возможность выбирать из спектра моделей принятия решений, отражающих зависимость вида рационального поведения от имеющейся информации и его отношения к риску. В работе предложена модель такого типа для случая вероятностной неопределенности, которая сводится к задаче максимизации математического ожидания как оценки эффективности при ограничении сверху на СКО (или дисперсию) как оценку риска. Возможен также вариант перевода в ограничение эффективности, т.е. постановка задачи на минимум СКО (или дисперсии) при ограничении снизу на математическое ожидание выигрыша. Выбор порогового значения в ограничении отражает компромисс между эффективностью и риском и подлежит выбору ЛПР.

Литература

1. *Vasilyev S. and Tsvirkun A.* Problems of managing the development of large-scale systems in modern conditions, 10th International Conference Management of Large-Scale System Development, Proceedings, IEEE Conference Publications. 2017. P.1-5.
2. *Harman R., Prus M.* Computing optimal experimental designs with respect to a compound *Bayes* risk *criterion* // Statistics & Probability Letters. 2018. Vol. 137. P. 135-141.
3. *Kuzmics C.* Abraham *Wald's* complete class theorem and Knightian uncertainty // Games and Economic Behavior. 2017. Vol. 104. P. 666-673.
4. *Radner R.* Decision and Choice: Bounded Rationality // International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences (Second Edition). 2015. P. 879-885.
5. *Горелик В.А., Золотова Т.В.* Принцип оптимальности «математическое ожидание – VAR» и его применение в задачах фондового инвестирования // Управление развитием крупномасштабных систем: Труды 12 международной конференции. М.: ИПУ РАН, 2019. С. 148-154.
6. *Жуковский В.И., Кириченко М.М.* Риски и исходы в многокритериальной задаче при неопределенности // Управление риском. 2016. № 2. С. 17-25.
7. *Лабскер Л.Г.* Свойство синтезирования критерия Вальда-Сэвиджа и его экономическое приложение // Экономика и математические методы. 2019. Т. 55. № 4. С. 89-103.
8. Шарп Уильям Ф., Александер Гордон Дж., Бэйли Джефри В. Инвестиции. М.: ИНФРА-М, 2018. 1028 с.
9. *Bekaert G., Hoerova M.* The VIX, the *variance* premium and *stock market* volatility // Journal of Econometrics. 2014. Vol. 183. Issue 2. P. 181-192.
10. *Ben Saïda A., Koubaa Y., Slim S.* Value-at-*Risk* under Lévy GARCH models: Evidence from global *stock markets* // Journal of International Financial *Markets*, Institutions and Money // 2017. Vol. 46. P. 30-53.
11. *García F., González-Bueno J.A., Oliver J.* Mean-*variance* investment strategy applied in emerging financial *markets*: Evidence from the Colombian *stock market* // Intellectual Economics. 2015. Vol. 9. Issue 1. P. 22-29.
12. *Gong X., Lin B.* Structural changes and out-of-sample prediction of realized range-based *variance* in the *stock market* // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2018. Vol. 494. P. 27-39.
13. *Huang A., Qiu L., Li Z.* Applying deep learning method in TVP-*VAR* model under systematic financial *risk* monitoring and early warning // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2021. Vol. 382. Article 113065.
14. *Kozaki M. Sato A. -H.* Application of the Beck model to *stock markets*: Value-at-*Risk* and portfolio *risk assessment* // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2008. Vol. 387, Issues 5–6. P. 1225-1246.
15. *Ourir A., Snoussi W. Markets* liquidity *risk* under extremal dependence: Analysis with *VaRs* methods //

Economic Modelling. 2012. Vol. 29. Issue 5. P. 1830-1836.
16. *Riedle T.* Using *Market* BuVaR as countercyclical Value at *Risk* approach to account for the *risks* of *stock market* crashes // The Quarterly Review of Economics and Finance. 2018. Vol. 69. P. 308-321.
17. *Su X.* Measuring extreme risk spillovers across international *stock markets*: A quantile *variance* decomposition analysis // The North American Journal of Economics and Finance. 2020. Vol. 51. Article 101098.
18. *Xu Y., Xiao J., Zhang L.* Global predictive power of the upside and downside *variances* of the U.S. equity *market* // Economic Modelling.2020. Vol. 93. P. 605-619.
19. *Горелик В.А., Золотова Т.В.* Управление риском в стохастических задачах фондового инвестирования // Управление развитием крупномасштабных систем: Труды 13 международной конференции. М.: ИПУ РАН, 2020. С. 303-311.
20. Инвестиционная компания «ФИНАМ», https://www.finam.ru/, период обращения 03.05.21.