ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СМЯГЧЕНИЙ УСЛОВИЙ ДОПОЛНЯЮЩЕЙ НЕЖЕСТКОСТИ ДЛЯ СТЫКОВКИ БЛОКОВ МОДЕЛЕЙ ОБЩЕГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ[78]

Пильник Н.П., Ужегов А.А.

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Россия, г. Москва, ул. Покровский бульвар, д.11
npilnik@hse.ru, auzhegov@hse.ru

Аннотация: В работе рассматривается достаточно простая динамическая модель общего экономического равновесия, на примере которой демонстрируются возможности смягчения условий дополняющей нежесткости. В модели описывается взаимодействие Потребителя, Производителя и Банка, поведение каждого из которых описывается оптимизационной задачей с набором ограничений.

Ключевые слова: динамические модели, принцип оптимальности, модель банка, модель потребителя, модель производителя, условия дополняющей нежесткости, равновесие.

Введение

Настоящая статья на примере упрощенной модели показывает гибкость и преимущества подхода к моделированию экономических агентов с использованием техники смягчения условий дополняющей нежесткости детально описанного в [1]. Такой подход уже оправдал себя эмпирически при описании российской банковской системы и её реакции на экономические шоки [2], поведения агрегированного потребителя на примере российской экономики [3], описании взаимодействия потребителя и производителя посредством введения агентов-торговцев [4]. Выгодным отличием является возможность гибко настраивать финансовый баланс для каждого из агентов с последующим получением траекторий для каждой из балансовых переменных. Так, например, в [3] легко адаптирована модель под расширенную номенклатуру баланса денежных доходов и расходов населения. В [2], [3], [4] также приводится дискуссия в случае каждого из агентов о преимуществах использования такого подхода при их описании. Данная же работа демонстрирует возможность использования смягчения условий дополняющей нежесткости для описания равновесия в модели из трех агентов: Банка, Потребителя и Производителя.

1 Описание модели

1.1 Постановка задачи банка

Рассмотрим банк, который к моменту t выдал производителю в рублях в размере $L(t)$. Средние сроки, на которые выдаются кредиты, обозначим через $1/\beta_l(t)$. Саму переменную $\beta_l(t)$ далее будет трактоваться как средние частоты возвратов кредитов. Тогда процесс изменения кредитов (остатков) описывается уравнением

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L(t)=K(t)-\beta_l(t)L(t) \quad (1)$$

где переменная $K(t)\geq 0$ описывает потоки вновь выданных кредитов производителю. Во всех приведенных далее формулах, если не оговорено иное, считается, что соотношение справедливо для любого момента времени на отрезке $[t_0,T]$. По всем выданным кредитам банк получает процентные платежи $r_l(t)L(t)$, где $r_l(t)$ – эффективная ставка процента по кредитам населению.

Кроме операций в рублях банк также проводит операции в валюте. Для описания этих процессов в модели дублируется описание кредитов, но к каждой переменной добавляется префикс «*v*», что указывает на то, что эта переменная номинирована в долларах. Уравнения для описания валютных операций выглядят следующим образом:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}vL(t)=vK(t)-\beta_{vl}(t)vL(t), \quad (2)$$

---

[78] *Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90106 «Моделирование поведения домашних хозяйств в рамках динамических моделей общего равновесия».*

где $vK(t) \geq 0$ описывает потоки вновь выданных валютных кредитов фирмам. Переменной $\beta_{vl}(t)$ описываются частоты возвратов валютных кредитов. Процентные платежи осуществляются согласно эффективным процентной ставке $r_{vl}(t)$.

Аналогичным образом к моменту t банк привлек депозиты населения в рублях в размере $S(t)$. Средние сроки, на которые привлекаются депозиты, обозначим через $1/\beta_s(t)$, а переменную $\beta_s(t)$ далее мы будем трактовать как средние частоты изъятия депозитов. Тогда процесс изменения депозитов (остатков) описывается уравнениями

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t) = V(t) - \beta_s(t)S(t), \tag{3}$$

где переменная $V(t) \geq 0$ описывает потоки вновь привлеченных депозитов населения. По привлеченным депозитам банк выплачивает процентные платежи $r_s(t)S(t)$, где $r_s(t)$ – эффективная ставка процента по депозитам.

Депозиты населения в валюте и операции с ними описываются соответствующими уравнениями:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}vS(t) = vV(t) - \beta_{vs}(t)vS(t), \tag{4}$$

где $vV(t) \geq 0$ - потоки вновь привлеченных валютных депозитов населения. Переменной $\beta_{vs}(t)$ описываются частоты возвратов валютных депозитов. Процентные платежи осуществляются согласно эффективным процентной ставке $r_{vs}(t)$. Для сопоставления переменных, номинированных в разных валютах, в модели будет использован валютный курс $w_w(t)$.

Кроме депозитов населения банк привлекает еще и средства населения и производителей в виде беспроцентных остатков расчетных счетов $N(t)$. Для величины этих остатков нет регулирующей величины типа процента, и банк должен просто ориентироваться на предложение со стороны клиентов. Поэтому эту величину считаем ограниченной экзогенно (банк может взять меньше предложенного, но не больше). Таким образом,

$$N(t) \leq N_h(t) + N_p(t), \tag{5}$$

где $N_h(t), N_p(t)$ – известное банку предложение остатков расчетных счетов населения и производителя.

В рамках модели банк также управляет запасами ликвидных средств $R(t)$, которые могут быть соотнесены и с обязательными резервами. В этой связи на динамику этих средств в задаче банка накладывается специальное ограничение

$$R(t) \geq \mu_s\beta_s(t)S(t) + \mu_{vs}\beta_{vs}(t)vS(t)w_w(t) + \mu_{pr}Pr(t), \tag{6}$$

где $Pr(t)$ - основной финансовый результат деятельности банка в модели (прибыль, которая выплачивается его собственнику – потребителю), а $\mu_s, \mu_{vs}, \mu_{pr}$ - коэффициенты ограничения ликвидности, значения которых в рамках задачи считается фиксированными и заданными.

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(t) = -K(t) + \left(\beta_l(t) + r_l(t)\right)L(t) + w_w(t)\Big(-vK(t) + \left(\beta_{vl}(t) + r_{vl}(t)\right)vL(t)\Big) + \\ +V(t) - \left(\beta_s(t) + r_s(t)\right)S(t) + w_w(t)\Big(vV(t) - \left(\beta_{vs}(t) + r_{vs}(t)\right)vS(t)\Big) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N(t) - Pr(t).\end{gathered} \tag{7}$$

Вышеприведенные соотношения представляют собой ограничения, наложенные в рамках модели на возможности банка выбирать значения своих планируемых переменных (управлений):

$$K(t), L(t), V(t), S(t), vK(t), vL(t), vV(t), vS(t), R(t), N(t), Pr(t). \tag{8}$$

Согласно принципу рациональных ожиданий, лежащему в основе моделей межвременного равновесия, при планировании своих управляющих переменных банк может рассчитывать на точный прогноз информационных переменных:

$$\beta_l(t), \beta_s(t), \beta_{vl}(t), \beta_{vs}(t), r_l(t), r_s(t), r_{vl}(t), r_{vs}(t), N_n(t), w_w(t), p_y(t).$$

Банк максимизирует ожидаемую дисконтированную полезность потока $Pr(t)$ с учетом заданного дефлятора $p(t)$:

$$\int_{t_0}^{T}\frac{1}{1-\eta}\left(\frac{Pr(t)}{p_y(t)}\right)^{1-\eta}\mathrm{e}^{-\delta t}\,\mathrm{d}t \tag{9}$$

по всем управлениям при ограничениях на некотором интервале $[t_0,T]$, заданных в начальный момент значениях фазовых переменных и заданных траекториях изменения экзогенных величин.

Для разрешимости задачи ограничения надо дополнить терминальными условиями, которые, как показано в [5], естественно задавать как условия роста суммы фазовых переменных

$$\begin{aligned}&R(T)+L(T)-S(T)-N(T)+w_w(T)\big(vL(T)-vS(T)\big)\geq\\&\geq\gamma\Big(R(t_0)+L(t_0)-S(t_0)-N(t_0)+w_w(t_0)\big(vL(t_0)-vS(t_0)\big)\Big).\end{aligned} \tag{10}$$

1.2 Постановка задачи потребителя

Потребитель, будучи собственником фирмы и банка, получает прибыль $Pr(t)$. Фактически для потребителя этот поток является внешним поступлением бесплатных средств. Сам по себе он не может быть переменной управления. Поэтому в данном случае используется схема, схожая с включением управления расчетными счетами в задаче банка. Будем считать, что

$$Pr(t)\leq Pr_p(t)+Pr_b(t), \tag{11}$$

где $Pr_p(t), Pr_b(t)$ - прибыль производителя и банка, которую они предлагают получить их собственнику. Сам собственник при этом может отказаться от части прибыли, оставив ее у соответствующего агента.

Доходы потребитель частично тратит на покупку потребительского продукта $C(t)$ по цене $p(t)$, а частично накапливает в виде депозитов в рублях и валюте $S(t)$ и $vS(t)$, по которым получает процент по ставке $r_s(t)$ и $r_{vs}(t)$. Динамика депозитов обоих типов описывается аналогично задаче банка с поправкой на то, что теперь эти переменные обозначают предложение новых вкладов со стороны потребителя (далее для того, чтобы различать спрос и предложение, переменные каждого блока будут проиндексированы соответствующим названию блока образом). Таким образом, в качестве ограничений в задаче потребителя используются следующие два дифференциальных ограничения и два неравенства:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t)=V(t)-\beta_s(t)S(t), \tag{12}$$

$$V(t)\geq 0, \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}vS(t)=vV(t)-\beta_{vs}(t)vS(t), \tag{14}$$

$$vV(t)\geq 0. \tag{15}$$

Разница доходов и расходов определяет изменение остатка расчетного счета $N(t)$. С учетом всех описанных операций финансовый баланс потребителя может быть записан в следующем виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N(t)=-V(t)+\big(\beta_s(t)+r_s(t)\big)S(t)+w_w(t)\Big(-vV(t)+\big(\beta_{vs}(t)+r_{vs}(t)\big)vS(t)\Big)+Pr(t)-p_y(t)C(t). \tag{16}$$

Как и в случае с производителем, средства на расчетном счете потребителя уже не являются абсолютно ликвидными. Это связано прежде всего с особенностью процесса получения прибыли, перечисляемой производителем и банком, а также возвратов средств на депозитных счетах. Естественно, что в рамках предположения о дискретности этого процесса в задаче банка, задача потребителя тоже должна быть модифицирована, что должно привести к появлению в задаче потребителя ограничения

$$N(t)\geq\nu_s\beta_s(t)S(t)+\nu_{vs}\beta_{vs}(t)vS(t)w_w(t)+\nu_c p_y(t)C(t). \tag{12}$$

Вышеприведенные соотношения представляют собой ограничения, наложенные в рамках модели на возможности потребителя выбирать значения своих планируемых переменных (управлений): $V(t), S(t), vV(t), vS(t), C(t), N(t), Pr(t)$.

Согласно принципу рациональных ожиданий, при планировании своих управляющих переменных потребитель может рассчитывать на точный прогноз информационных переменных:

$\beta_s(t), \beta_{vs}(t), r_s(t) r_{vs}(t), Pr_p(t), Pr_b(t), w_w(t), p_y(t).$

Потребитель стремится максимизировать приведенную полезность от своего реального потребления $C(t)$:

$$\int_{t_0}^{T} \frac{1}{1-\eta} \left(C(t)\right)^{1-\eta} \mathrm{e}^{-\delta t} \, \mathrm{d}t. \tag{13}$$

Последним ограничением на величину денежных остатков и депозитов в задаче потребителя является терминальное ограничение

$$N(T) + S(T) + w_w(T) vS(T) \geq \gamma\left(N(t_0) + S(t_0) + w_w(t_0) vS(t_0)\right). \tag{14}$$

1.3 Постановка задачи производителя

Производитель в модели осуществляет производство и инвестиции в его будущий рост. Произведенный продукт $Y(t) \geq 0$ фирма продает на рынке по цене $p_y(t)$ и по той же цене на том же рынке она покупает фондообразующий продукт. Предполагается, что в экономике производится один продукт, который без остатка делится на потребление и капитальные затраты. Единственным фактором производства являются накопленные капитальные затраты, причем выпуск пропорционален этой величине с коэффициентом приростной фондоемкости b. Таким образом, $b\frac{d}{dt}Y(t)$ – это капитальные затраты (реальные инвестиции), обеспечивающие пропорциональный прирост выпуска $\frac{d}{dt}Y(t)$. Начальное значение выпуска $Y(t_0) > 0$ считается заданным.

Операции производителя по использованию рублевых и валютных кредитов (аналогично задаче банка и потребителя) описываются четверкой следующих соотношений

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L(t) = K(t) - \beta_l(t) L(t), \tag{15}$$

$$K(t) \geq 0, \tag{16}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} vL(t) = vK(t) - \beta_{vl}(t) vL(t), \tag{17}$$

$$vK(t) \geq 0. \tag{18}$$

Производитель передает поток прибыли в размере $Pr(t)$ потребителю, который рассматривается как собственник. Разница доходов и расходов определяет изменение остатка расчетного счета $N(t)$. С учетом всех описанных операций финансовый баланс производителя может быть записан в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} N(t) = K(t) - \left(\beta_l(t) + r_l(t)\right) L(t) + w_w(t)\left(vK(t) - \left(\beta_{vl}(t) + r_{vl}(t)\right) vL(t)\right) + \\ + p_y(t) Y(t) - p_y(t) b \frac{d}{dt} Y(t) - Pr(t). \end{aligned} \tag{19}$$

При этом у производителя в модели есть свое ограничение на остаток средств на расчетном счете

$$N(t) \geq \nu_l \beta_l(t) L(t) + \nu_{vl} \beta_{vl}(t) vL(t) w_{vl}(t) + \nu_y p_y(t) Y(t) + \nu_{pr} Pr(t). \tag{20}$$

Вышеприведенные соотношения представляют собой ограничения, наложенные в рамках модели на возможности производителя выбирать значения своих планируемых переменных (управлений):

$K(t), L(t), vK(t), vL(t), Y(t), N(t), Pr(t).$

Согласно принципу рациональных ожиданий, при планировании своих управляющих переменных потребитель может рассчитывать на точный прогноз информационных переменных:

$\beta_l(t), \beta_{vl}(t), r_l(t) r_{vl}(t), w_w(t), p_y(t).$

Предполагается, что производитель стремится максимизировать приведенный поток дисконтированной выплачиваемой прибыли, которая в полном объеме переходит к потребителю-собственнику:

$$\int_{t_0}^{T} \frac{1}{1-\eta} \left(\frac{Pr(t)}{p_y(t)}\right)^{1-\eta} \mathrm{e}^{-\delta t} \, \mathrm{d}t. \tag{21}$$

Терминальное условие в задаче производителя имеет следующий вид:

$$N(T)+p_y(T)bY(T)-L(T)-w_w(T)vL(T)\geq\gamma\Big(N(t_0)+p_y(t_0)bY(t_0)-L(t_0)-w_w(t_0)vL(t_0)\Big). \quad (22)$$

2 Решение модели

Здесь и далее индекс b относится к агенту банку, индекс h – к потребителю и p – к производителю.

2.1 Решение задачи банка

Решение описанной задачи банка приведет к основным соотношениям, которые описывают поведение агента в модели.

Выражение для доходности агента (темп падения двойственной переменной к финансовому балансу):

$$\rho_b(t)=\frac{a_{bvs}\left(w_{vs}(t)r_{vs}(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w_{vs}(t)\right)vS_b(t)+S_b(t)r_s(t)a_{bs}+a_{bvl}\left(w_{vl}(t)r_{vl}(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w_{vl}(t)\right)vL_b(t)+a_{bl}L_b(t)r_l(t)}{-w_{vs}(t)a_{bvs}\left(\beta_{vs}(t)\mu_{vs}-1\right)vS_b(t)-a_{bs}\left(\beta_s(t)\mu_s-1\right)S_b(t)+vL_b(t)w_{vl}(t)a_{bvl}+a_{bl}L_b(t)} \quad (23)$$

Объемы вновь выданных кредитов:

$$\begin{aligned}K_b(t)=&-a_{bl}\left(-r_l(t)+\rho_b(t)\right)L_b(t)+b_{bl}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N_b(t)+w_{vl}(t)\big(r_{vl}(t)+\beta_{vl}(t)\big)vL_b(t)+\big(r_l(t)+\beta_l(t)\big)L_b(t)\right)-\\&-c_{bl}\left(\Pr_b(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R_b(t)+w_{vs}(t)\big(r_{vs}(t)+\beta_{vs}(t)\big)vS_b(t)+\big(r_s(t)+\beta_s(t)\big)S_b(t)\right)\end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}vK_b(t)=&-a_{bvl}\left(-r_{vl}(t)+\rho_b(t)-\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w_{vl}(t)}{w_{vl}(t)}\right)vL_b(t)+\\&+\frac{b_{bvl}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N_b(t)+w_{vl}(t)\big(r_{vl}(t)+\beta_{vl}(t)\big)vL_b(t)+\big(r_l(t)+\beta_l(t)\big)L_b(t)\right)}{w_{vl}(t)}-\\&-\frac{c_{bvl}\left(\Pr_b(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R_b(t)+w_{vs}(t)\big(r_{vs}(t)+\beta_{vs}(t)\big)vS_b(t)+\big(r_s(t)+\beta_s(t)\big)S_b(t)\right)}{w_{vl}(t)}\end{aligned} \quad (25)$$

Объемы привлеченных депозитов:

$$\begin{aligned}V_b(t)=&-a_{bs}\left(\left(\beta_s(t)\mu_s-1\right)\rho_b(t)+r_s(t)\right)S_b(t)+\\&+b_{bs}\left(\Pr_b(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R_b(t)+w_{vs}(t)\big(r_{vs}(t)+\beta_{vs}(t)\big)vS_b(t)+\big(r_s(t)+\beta_s(t)\big)S_b(t)\right)-\\&-c_{bs}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N_b(t)+w_{vl}(t)\big(r_{vl}(t)+\beta_{vl}(t)\big)vL_b(t)+\big(r_l(t)+\beta_l(t)\big)L_b(t)\right)\end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}vV_b(t)=&-a_{bvs}\left(\left(\beta_{vs}(t)\mu_{vs}-1\right)\rho_b(t)+r_{vs}(t)+\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w_{vs}(t)}{w_{vs}(t)}\right)vS_b(t)+\\&+\frac{b_{bvs}\left(\Pr_b(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R_b(t)+w_{vs}(t)\big(r_{vs}(t)+\beta_{vs}(t)\big)vS_b(t)+\big(r_s(t)+\beta_s(t)\big)S_b(t)\right)}{w_{vs}(t)}-\\&-\frac{c_{bvs}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N_b(t)+w_{vl}(t)\big(r_{vl}(t)+\beta_{vl}(t)\big)vL_b(t)+\big(r_l(t)+\beta_l(t)\big)L_b(t)\right)}{w_{vs}(t)}\end{aligned} \quad (27)$$

Балансовые соотношения для кредитов и депозитов:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_b(t)=K_b(t)-\beta_l(t)L_b(t), \quad (28)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} vL_b(t) = vK_b(t) - \beta_{vl}(t) vL_b(t), \tag{29}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_b(t) = V_b(t) - \beta_s(t) S_b(t), \tag{30}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} vS_b(t) = vV_b(t) - \beta_{vs}(t) vS_b(t). \tag{31}$$

Траектория прибыли агента:

$$\mathrm{Pr}_b(t) = \mathrm{Pr}_b(t0)\left(\rho_b(t)\mu_{pr} + 1\right)^{-\frac{1}{\eta_b}} \left(\frac{p_y(t)}{p_y(t0)}\right)^{1-\frac{1}{\eta_b}} \mathrm{e}^{-\frac{\Delta_b t}{\eta_b} + \frac{\int_{t0}^{t} \rho(u_b)\mathrm{d}u_b}{\eta_b}} \tag{32}$$

Объем резервируемых ликвидных средств:

$$R_b(t) = \mu_s \beta_s(t) S_b(t) + \mu_{vs} \beta_{vs}(t) vS_b(t) w_{vs}(t) + \mu_{pr} \mathrm{Pr}_b(t). \tag{33}$$

2.2 Решение задачи потребителя

Решение задачи потребителя приведет к основным соотношениям, которые описывают поведение агента в модели.

Выражение для доходности агента (темп падения двойственной переменной к финансовому балансу):

$$\rho_h(t) = \frac{a_{vs}\left(r_{vs}(t) w_{vs}(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} w_{vs}(t)\right) vS_h(t) + r_s(t) S_h(t) a_s}{a_{vs} w_{vs}(t)\left(\nu_{vs}\beta_{vs}(t) + 1\right) vS_h(t) + a_s\left(\nu_s \beta_s(t) + 1\right) S_h(t)} \tag{34}$$

Объемы вложений депозитов:

$$\begin{aligned} V_h(t) = {} & -a_s\left(\left(\nu_s\beta_s(t)+1\right)\rho_h(t) - r_s(t)\right) S_h(t) + \\ & + b_s\left(\mathop{\mathrm{Pr}}_{pr}(t) + \left(r_s(t)+\beta_s(t)\right) S_h(t) + w_{vs}(t)\left(r_{vs}(t)+\beta_{vs}(t)\right) vS_h(t)\right) - \\ & - c_s\left(p_y(t) C_h(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} N_h(t)\right) \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} vV_h(t) = {} & -a_{vs}\left(\left(\beta_{vs}(t)\nu_{vs} + 1\right)\rho_h(t) - r_{vs}(t) - \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} w_{vs}(t)}{w_{vs}(t)}\right) vS_h(t) + \\ & + \frac{b_{vs}\left(\mathop{\mathrm{Pr}}_{pr}(t) + \left(r_s(t)+\beta_s(t)\right) S_h(t) + w_{vs}(t)\left(r_{vs}(t)+\beta_{vs}(t)\right) vS_h(t)\right)}{w_{vs}(t)} - \\ & - \frac{c_{vs}\left(p_y(t) C_h(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} N_h(t)\right)}{w_{vs}(t)} \end{aligned}. \tag{36}$$

Балансовые соотношения для депозитов:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_h(t) = V_h(t) - \beta_s(t) S_h(t), \tag{37}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} vS_h(t) = vV_h(t) - \beta_{vs}(t) vS_h(t). \tag{38}$$

Траектория потребления:

$$C_h(t) = C_h(t0)\left(\rho_h(t)\nu_c + 1\right)^{-\frac{1}{\eta_h}} \left(\frac{p_y(t)}{p_y(t0)}\right)^{-\frac{1}{\eta_h}} \mathrm{e}^{-\frac{\Delta_h t}{\eta_h} + \frac{\int_{t0}^{t} \rho(u_h)\mathrm{d}u_h}{\eta_h}}. \tag{39}$$

Остатки средств на расчетных счетах:

$$N_h(t) = \nu_s \beta_s(t) S_h(t) + \nu_{vs}\beta_{vs}(t) vS_h(t) w_{vs}(t) + \nu_c p_y(t) C_h(t). \tag{40}$$

2.3 Решение задачи производителя

Решение задачи производителя приведет к основным соотношениям, которые описывают поведение агента в модели.

Выражение для доходности агента (темп падения двойственной переменной к финансовому балансу):

$$\rho_p(t)=\frac{-a_{vl}\left(w_{vl}(t)r_{vl}(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w_{vl}(t)\right)vL_p(t)-r_l(t)L_p(t)a_l}{w_{vl}(t)a_{vl}\left(\nu_{vl}\beta_{vl}(t)-1\right)vL_p(t)+a_l\left(\nu_l\beta_l(t)-1\right)L_p(t)}\,, \tag{41}$$

$$\rho_p(t)=\frac{1}{b+\nu_y}+\frac{b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_y(t)}{\left(b+\nu_y\right)p_y(t)}\,. \tag{42}$$

Объемы вновь привлеченных кредитов:

$$\begin{aligned}K_p(t)&=-a_l\left(-\left(-\nu_l\beta_l(t)+1\right)\rho_p(t)+r_l(t)\right)L_p(t)+\\&+b_l\begin{pmatrix}p_y(t)b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y_p(t)+\mathrm{Pr}_p(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N_p(t)+\\+w_{vl}(t)\left(r_{vl}(t)+\beta_{vl}(t)\right)vL_p(t)+\left(r_l(t)+\beta_l(t)\right)L_p(t)\end{pmatrix}-c_l p_y(t)Y_p(t)\end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}vK_p(t)&=-a_{vl}\left(-\left(1-\nu_{vl}\beta_{vl}(t)\right)\rho_p(t)+r_{vl}(t)+\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w_{vl}(t)}{w_{vl}(t)}\right)vL_p(t)+\\&+\frac{b_{vl}\begin{pmatrix}p_y(t)b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y_p(t)+\mathrm{Pr}_p(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N_p(t)+\\+w_{vl}(t)\left(r_{vl}(t)+\beta_{vl}(t)\right)vL_p(t)+\left(r_l(t)+\beta_l(t)\right)L_p(t)\end{pmatrix}}{w_{vl}(t)}-\frac{c_{vl}p_y(t)Y_p(t)}{w_{vl}(t)}\end{aligned} \tag{44}$$

Балансовые соотношения для кредитов:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_p(t)=K_p(t)-\beta_l(t)L_p(t)\,, \tag{45}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}vL_p(t)=vK_p(t)-\beta_{vl}(t)vL_p(t)\,. \tag{46}$$

Траектория прибыли:

$$\mathrm{Pr}_p(t)=\mathrm{Pr}_p(t0)\left(\rho_p(t)\nu_{pr}+1\right)^{-\frac{1}{\eta_p}}\left(\frac{p_y(t)}{p_y(t0)}\right)^{1-\frac{1}{\eta_p}}\mathrm{e}^{-\frac{\Delta_p t}{\eta_p}+\frac{\int_{t0}^{t}\rho(u_p)\mathrm{d}u_p}{\eta_p}}\,. \tag{47}$$

Остатки средств на расчетных счетах:

$$N_p(t)=\nu_l\beta_l(t)L_p(t)+\nu_{vl}\beta_{vl}(t)vL_p(t)w_w(t)+\nu_y p_y(t)Y_p(t)+\nu_{pr}\,\mathrm{Pr}_p(t) \tag{48}$$

3 Условия равновесия в модели

В равновесии модели должны выполняться следующий набор условий. Во-первых, в равновесии должны быть согласованы спрос и предложение производимого в экономике товара, то есть

$$Y_p(t)=C_h(t)+b\frac{d}{dt}Y_p(t)\,. \tag{49}$$

Во-вторых, должны быть согласованы спрос на кредиты со стороны производителя и предложение кредитов со стороны банка:

$$K_b(t)=K_p(t),L_b(t)=L_p(t)\,, \tag{50}$$

$$vK_b(t)=vK_p(t),vL_b(t)=vL_p(t)\,. \tag{51}$$

Наконец, в-третьих, должны быть согласованы спрос на депозиты со стороны банка и предложение депозитов со стороны потребителя:

$$V_b(t)=V_h(t),S_b(t)=S_h(t)\,, \tag{52}$$

$$vV_b(t)=vV_h(t), vS_b(t)=vS_h(t). \tag{53}$$

Использование этих соотношений при сборе модели (стыковке отдельных блоков модели) позволит определить большую часть информационных переменных.

Заключение

Собранные вместе решения задач агентов и условия равновесия позволяют аналитически найти равновесие в модели. Наиболее важным свойством этого равновесия является тот факт, что все равновесия в чистых режимах являются его частным случаем при выборе соответствующих коэффициентов. Поскольку эти выражения весьма громоздкие, далее мы покажем, как они выглядят для одного из наиболее интересных случаев, трактуемых как равновесие в смешанных режимах (аналог равновесия в смешанных стратегиях).

Рассмотрим частный случай равновесия, в котором коэффициенты смягчений условий дополняющей нежесткости и ограничений ликвидности принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} &b_s=bs,\quad b_{vs}=1-bs, && b_{bs}=bs,\quad b_{bvs}=1-bs,\\ &c_s=bs,\quad c_{vs}=1-bs, && c_{bs}=0,\quad c_{bvs}=0,\\ &b_l=bl,\quad b_{vl}=1-bl, && b_{bl}=bl,\quad b_{bvl}=1-bl,\\ &c_l=bl,\quad c_{vl}=1-bl, && c_{bl}=0,\quad c_{bvl}=0 \end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned} &N_p(t)=0,\quad N_h(t)=0, && \\ &N_b(t)=0,\quad R_b(t)=0, && a_s=a,\quad a_l=a,\\ &\nu_s=0,\quad \nu_l=0, && a_{vl}=a,\quad a_{vs}=a,\\ &\nu_{vs}=0,\quad \nu_{vl}=0, \nu_y=0, && a_{bs}=a,\quad a_{bl}=a,\\ &\mu_s=0,\quad \mu_{vs}=0, && a_{bvl}=a,\quad a_{bvs}=a \end{aligned} \tag{55}$$

В этом случае выражения для доходностей агентов можно переписать в виде:

$$\rho_h(t)=\frac{\left(r_{vs}(t)w_w(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w_w(t)\right)vS(t)+r_s(t)S(t)}{w_w(t)vS(t)+S(t)}, \tag{56}$$

$$\rho_p(t)=\frac{\left(w_w(t)r_{vl}(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w_w(t)\right)vL(t)+r_l(t)L(t)}{w_w(t)vL(t)+L(t)}, \tag{57}$$

$$\rho_b(t)=\frac{\left(r_{vs}(t)w_w(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w_w(t)\right)vS(t)+r_s(t)S(t)+\left(w_w(t)r_{vl}(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w_w(t)\right)vL(t)+r_l(t)L(t)}{w_w(t)vS(t)+S(t)+w_w(t)vL(t)+L(t)}. \tag{58}$$

После упрощения получим:

$$\rho_h(t)=r_{vs}(t)+\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w_w(t)}{w_w(t)},\quad \rho_h(t)=r_s(t),\quad \rho_h(t)=\rho_b(t), \tag{59}$$

$$\rho_p(t)=r_{vl}(t)+\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w_w(t)}{w_w(t)},\quad \rho_p(t)=r_l(t),\quad \rho_p(t)=\rho_b(t), \tag{60}$$

$$\rho_p(t)=\frac{1}{b}+\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p(t)}{p(t)}. \tag{61}$$

Окончательные выражения для процентных ставок в равновесии:

$$r_s(t)=r_l(t)=\frac{1}{b}+\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p(t)}{p(t)}, \tag{62}$$

$$r_{vs}(t)=r_{vl}(t)=\frac{1}{b}+\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p(t)}{p(t)}-\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w_w(t)}{w_w(t)}\,. \qquad (63)$$

Таким образом, можно утверждать, что предложенные и использованные на практике смягчения условий дополняющей нежесткости не только позволяют получить аналитическое описание равновесия без всяких дополнительных процедур упрощения и линеаризации, но как частный случай содержит все равновесия в чистых режимах.

Литература

1.*Васильев С. Б., Пильник Н. П., Радионов С. А.* Смягчение условий дополняющей нежесткости в динамических моделях общего равновесия // Математическое моделирование. 2018. Т. 30. № 12. С. 111-128.

2. *Пильник Н. П., Радионов С. А., Языков А. А.* Модель оптимального поведения современной российской банковской системы // Экономический журнал Высшей школы экономики. 2018. Т. 22. № 3. С. 418-447.

3. *Станкевич И. П., Ужегов А. А.* Модель оптимального поведения агрегированного домохозяйства // Труды Института системного анализа Российской академии наук. 2018. Т. 68. № 2. С. 59-62.

4. *Ужегов А. А., Станкевич И. П., Васильев С. Б.* Модель реального сектора российской экономики с несколькими продуктами и агентами-торговцами // Экономический журнал Высшей школы экономики. 2018. Т. 22. № 3. С. 362-386.

5. *Поспелов И. Г., Пильник Н. П.* О естественных терминальных условиях в моделях межвременного равновесия // Экономический журнал Высшей школы экономики. 2007. Т. 11. № 1. С. 1-33.