УПРАВЛЕНИЕ РИСКАМИ СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОЙ АРБИТРАЖНОЙ МОДЕЛИ

Калашников А.О., Аникина Е.В.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная, д.65

aokalash@ipu.ru, janet0584@mail.ru

Аннотация: В настоящей работе рассматривается подход к построению механизмов управления безопасностью сложной системы в условиях, когда функции локальных рисков независимых элементов системы являются случайными функциями. В качестве механизма упорядочивания локальных рисков элементов системы предлагается использование линейных и квадратичных функционалов специального вида.

Ключевые слова: локальный риск, интегральный риск, теоретико-игровые модели, обобщенная арбитражная модель, максимально стимулирующее решение, линейный функционал, квадратичный функционал.

Введение

В настоящее время в России, в рамках программ реализации ряда Национальных проектов, например, таких, как «Цифровая экономика», «Наука», «Образование», «Здравоохранение», «Жильё и городская среда», «Экология» и ряде других, создается большое количество крупномасштабных, распределенных систем, зачастую, не имеющие аналогов как по своей сложности, с одной стороны, так и по размерам потенциальных угроз, возникающих в случае их отказа или некорректной работы, с другой [1, 2]. В основе данных систем лежат сложные компьютерные и телекоммуникационные сети, безопасность которых является ключевым элементом обеспечения безопасности систем в целом. Таким образом, проблема обеспечения безопасности и управления рисками сложных систем, в настоящее время, становится как никогда актуальной и злободневной. Причем, это касается не только активного внедрения существующих методов и средств информационной безопасности и управления рисками, но и их совершенствования, а также развития новых подходов для решения указанных проблем.

Одним из таких подходов может стать использование различных теоретико-игровых моделей, в том числе, на основе арбитражных схем [3-5]. В работе [3] рассматривалась общая модель сложной системы, в рамках которой субъект осуществляет управление рисками путем эффективного, в том или ином смысле, распределения имеющегося в его распоряжении однородного ресурса между ее элементами. Для оценки текущего состояния элементов были предложены функции локального риска, удовлетворяющие некоторым заданным условиям, а для оценки состояния системы в целом – функция интегрального риска. Предполагалось, что все функции локального риска являются детерминированными, однако информация об их конкретном виде у субъекта управления отсутствует. Было показано, что в случае отсутствия взаимного влияния элементов системы друг на друга для нахождения эффективного распределения ресурса может быть использован теоретико-игровой подход с использованием арбитражной схемы, основанной на принципах стимуляции и неподавления (МС-решение). В работах [4-5] был рассмотрен случай, когда элементы системы являются зависимыми и могут оказывать на локальные риски друг друга определенное воздействие. Для решения данной задачи был использован другой теоретико-игровой подход с использованием игры на когнитивной карте («когнитивная игра»).

В настоящей работе указанный подход развивается и обобщается на случай, когда функции локальных рисков отдельных элементов являются, вообще говоря, случайными функциями.

1 Общая модель управления рисками сложной системы

Рассмотрим общую модель управления рисками сложной системы, состоящей из множества, различных, в общем случае, элементов: $S = \{s_1, \dots, s_i, \dots, s_n\}$, $\quad i \in N = \{1, \dots, n\}$. В рамках модели будем предполагать, что все элементы системы S являются независимыми, в том смысле, что величина локальных рисков одного элемента, не оказывает на величины локальных рисков любых других элементов никакого влияния. Иными словами – локальные риски элементов являются независимыми. Предположим, что существуют два «субъекта»: субъект N (природа, nature) и субъект D (защитник, defender), которые могут, в той или иной степени оказывать влияние на величины локальных рисков элементов системы S. Степень влияния определяется объемом некоторого однородного ресурса, который субъект N и субъект D затрачивают на изменение величины локальных рисков элементов системы S. Перейдем теперь к математической постановке задачи.

Будем считать, что:

- субъект D (защитник) располагает некоторым *известным* объемом ресурса $X \geq 0$, который он может произвольным образом распределять между элементами системы S: $x = (x^1, \dots, x^n)$, $x^i \geq 0, i \in N, \sum_{i=1}^{n} x^i \leq X$;
- субъект N (природа) располагает некоторым *неизвестным* объемом ресурса $\Phi \geq 0$, который он *случайным* образом распределяет между элементами системы S.

Таким образом, можно считать, что для субъекта N вектор распределения ресурса представляет собой множество положительных, попарно независимых случайных величин $\{\varphi^i \geq 0, i \in N\}$.

Сопоставим каждому элементы $s_i \in S$, $i \in N$, системы S пару неотрицательных чисел $(x^i, \varphi^i) \in \mathbb{R}^2$ и определим для него случайную функцию локального риска $\rho_i(x^i, \varphi^i)$: $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, значение которой описывает состояние данного элемента. Будем считать, что в этом случае состояние системы S в целом описывается случайной вектор-функцией риска $(\rho_1(x^1, \varphi^1), \dots, \rho_n(x^n, \varphi^n))$.

Обозначим: $\tilde{\varphi}^i \geq 0$ некоторую реализацию случайной величины φ^i, $i \in N$ и будем предполагать, что в рамках рассматриваемой модели случайные функции локального риска $\rho_i(\cdot,\cdot)$, $i \in N$, обладают следующими свойствами:

P1: для любых $i \in N, x^i \geq 0, \tilde{\varphi}^i \geq 0$: $\rho_i(x^i, \tilde{\varphi}^i) \geq 0$;

P2а: для любых $i \in N, x_1^i \geq 0, x_2^i \geq 0, \tilde{\varphi}^i \geq 0$ таких, что $x_1^i < x_2^i$: $\rho_i(x_1^i, \tilde{\varphi}^i) > \rho_i(x_2^i, \tilde{\varphi}^i)$;

P2б: для любых $i \in N, \tilde{\varphi}_1^i \geq 0, \tilde{\varphi}_2^i \geq 0, x^i \geq 0$ таких, что $\tilde{\varphi}_1^i < \tilde{\varphi}_2^i$: $\rho_i(x^i, \tilde{y}_1^i) < \rho_i(x^i, \tilde{y}_2^i)$;

P3а: для любых $i \in N, x^i \geq 0, \tilde{\varphi}^i \geq 0$: существует число $\rho_i^\infty(\tilde{\varphi}^i) > 0$ такое, что $\rho_i(x^i, \tilde{\varphi}^i) > \rho_i^\infty(\tilde{\varphi}^i)$;

P3б: для любых $i \in N, x^i \geq 0, \tilde{\varphi}^i \geq 0$: существует число $\rho_i^\infty(x^i) > 0$ такое, что $\rho_i(x^i, \tilde{\varphi}^i) < \rho_i^\infty(x^i)$.

Таким образом, случайные функции локального риска $\rho_i = \rho_i(\cdot,\cdot)$, $i \in N$, представляют собой семейство независимых, неотрицательных, ограниченных и строго монотонных случайных функций, убывающих по первому и возрастающих по второму аргументу. В свою очередь, каждую такую случайную функцию, можно рассматривать, как одномерную случайную величину ρ_i, $i \in N$ с функцией распределения F_i. Тогда можно считать, что в рамках рассматриваемой модели задано некоторое семейство одномерных вероятностных распределений $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N\}$, где F_i – функция распределения случайной величины ρ_i, $i \in N$.

Общая модель управления рисками сложной системы в условиях «игры с природой» может быть задана следующим кортежем:

$$\langle \text{субъект } D, \text{субъект } N, \text{ресурс } X, \text{ресурс } \Phi, \text{система } S = \{s_i\}, \{\rho_i\}, \{F_i\}, i \in N \rangle \quad (1)$$

Как было показано ранее (подробнее см., например, [1-5]), поскольку, предполагается, что конкретный вид случайных функций локального риска нам не известен, то представляется целесообразным перейти от «глобальной» задачи минимизации интегрального риска к «локальной» задаче снижения максимума локальных рисков отдельных элементов системы S. При этом, необходимо учитывать тот факт, что локальные риски ρ_i, $i \in N$, в отличие от случаев, рассмотренных ранее, представляют собой случайные величины.

Обозначим: $\mathcal{X}(X) = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^i \geq 0, i \in N, \sum_{i=1}^{n} x^i \leq X\}$ – множество допустимых распределений ресурса X между элементами системы S субъектом D, тогда «задача защитника», с учетом сделанного выше замечания, может иметь вид:

$$\inf_{x \in \mathcal{X}} \sup_{i \in N} \sup_{\tilde{\varphi}_i \in \Phi} \rho_i(x^i, \tilde{\varphi}_i) \quad (2)$$

Ранее в работах [1-5] предполагалось, что все функции локального риска элементов системы S являются детерминированными, однако информация об их конкретном виде у игрока отсутствует. Было показано, что в случае независимости (отсутствия взаимного влияния друг на друга) элементов системы для нахождения эффективного распределения ресурса может быть использован теоретико-игровой подход на основе использования арбитражной схемы, основанной на принципах «стимуляции и неподавления» (МС-решение). МС-решение позволяло находить эффективное распределение ресурса субъектом D для решения задачи (2), на основе информации о текущих уровнях локальных рисков, которые рассматривались, как своеобразные «заявки» элементов $s_i \in S$, $i \in N$, системы S и, которые также предполагались детерминированными.

Поскольку в настоящей работе мы рассматриваем случай, когда все функции локального риска предполагаются случайными, то непосредственный перенос полученных в [1-5] результатов на рассматриваемую модель не представляется возможным. Таким образом, для решения задачи (2) необходимо обобщить рассмотренную в работах [1-5] арбитражную схему, а также разработать метод, позволяющий упорядочивать узлы $s_i \in S$, $i \in N$, сети S на основе их рискового потенциала («заявок»), используя исключительно информацию об одномерных случайных величинах ρ_i, с функциями распределения F_i, $i \in N$.

2 Обобщенная арбитражная модель

Рассмотрим множество $I = \{I_k\}$, $k \in N = \{1, \dots, n\}$, элементы которого мы будем называть *игроками* и соответствующий им класс $\mathcal{M} = \{A\}$ кооперативных игр, где каждая игра отождествляется со множеством возможных «выигрышей» ее участников: $A = \{a = (a_1, \dots, a_n): a_i \geq 0, i \in N\} \subset \mathbb{R}_+^n$. Зададим на $\mathcal{M}$ некоторое частичное упорядочение относительно предпочтения $\succcurlyeq$.

Обозначим $p = (p_1, \dots, p_n)$ некоторую перестановку чисел $\{1, \dots, n\}$ и предположим, что класс $\mathcal{M}$ разбит на пересекающиеся подклассы $\mathcal{M}_p$ такие, что при $A \in \mathcal{M}_p$ «вклад» в игру p_1-го игрока «не меньше» «вклада» p_2-го, «вклад» p_2-го игрока «не меньше» «вклада» p_3-го игрока и так далее. Обозначим $\mathcal{M}_0 = \bigcap_p \mathcal{M}_p$ и $\mathcal{B} = \{b = (b_1, \dots, b_n): b_i = b_j, i, j \in N, i \neq j\} \subset \mathbb{R}_+^n$ – биссектрису в $\mathbb{R}_+^n$.

Решением для игр из класса $\mathcal{M}$ будем называть определенную на $\mathcal{M}$ вектор-функцию множеств $\pi(A) = (\pi_1(A), \dots, \pi_n(A))$ такую, что для любого $A \in \mathcal{M}$ вектор $\pi(A) \in A$ и $\pi_k(A)$, $k \in N$ – выигрыш k-го игрока в игре $A \in \mathcal{M}$. Таким образом, решение $\pi(A)$ является *селектором* $A \in \mathcal{M}$.

Обозначим $\bar{A}$ – замыкание множества A, $\delta(A)$ – границу множества A, $\Pi(A)$ – оптимальную по Парето границу множества $A \in \mathcal{M}$, $e(A) = \Pi(A) \cap \mathcal{B}$ – *равномерный селектор*.

Определим класс $\mathcal{P}$ «стимулирующих» селекторов $\pi(A)$ со следующими свойствами:

С1 (оптимальность по Парето): для любого $A \in \mathcal{M}$: $\pi(A) \in \Pi(A)$.

С2 (монотонность): для любых $A_1 \in \mathcal{M}$ и $A_2 \in \mathcal{M}$ таких, что $A_1 \succcurlyeq A_2$:
$\pi(A_1) \geq \pi(A_2)$, то есть, $\pi_k(A_1) \geq \pi_k(A_2)$, $k \in N$ и существует $j \in N$ такое, что $\pi_k(A_1) > \pi_k(A_2)$.

С3 (паритетность): для любого $A \in \mathcal{M}_p$: $\pi_{p_1}(A) \geq \pi_{p_2}(A) \geq \cdots \geq \pi_{p_n}(A)$
(в частности: если $A \in \mathcal{M}_0$: $\pi_{p_1}(A) = \pi_{p_2}(A) = \cdots = \pi_{p_n}(A)$, иначе: $\pi(A) \in \mathcal{B}$).

Класс $\mathcal{P}$ может содержать много селекторов и необходимо выделить среди них один, в некотором смысле наиболее эффективный с точки зрения решения задачи (2). Отметим, что без каких-либо дополнительных предположений о классе $\mathcal{M}$ класс $\mathcal{P}$ может оказаться пустым.

Рассмотрим сначала случай двух игроков p_1 и p_2, и определим понятие МС-селектора.

Определение 1. Пусть $A \in \mathcal{M}_p$, тогда назовем селектор $\hat{\pi}(A) \in A$ «максимально стимулирующим» (МС-селектором) если:

1) $\hat{\pi}(A) \in \mathcal{P}$;
2) $\hat{\pi}_{p_1}(A) = \sup_{\pi(A) \in \mathcal{P}} \pi_{p_1}(A)$.

Из приведенного определения следует, что если «вклад» в игру p_1-го игрока «не меньше» «вклада» p_2-го, то МС-селектор дает p_1-му игроку максимальный выигрыш по сравнению со всеми иными решениями (или селекторами), не противоречащими свойствам С1, С2 и С3. В этих условиях справедливо следующее утверждение, которое существенно обобщает соответствующие предложения в [1, 2, 6-10], хотя методика доказательства отличается очень мало.

Утверждение 1. Пусть класс $\mathcal{P}$ не пуст и множества $A \in \mathcal{M}$ замкнуты, тогда МС-селектор существует и единственен.

Доказательство опускаем.

Перейдем теперь к общему случаю.

Определение 2. Пусть $A \in \mathcal{M}_p$, тогда назовем селектор $\hat{\pi}(A) \in A$ «максимально стимулирующим» (МС-селектором) если:

1) $\hat{\pi}(A) \in \mathcal{P}$;
2) $\hat{\pi}_{p_1}(A) = \sup_{\pi(A) \in \mathcal{P}} \pi_{p_1}(A)$;
   $\hat{\pi}_{p_2}(A) = \sup_{\pi(A) \in \mathcal{P}_{p_1}} \pi_{p_2}(A)$;
   …
   $\hat{\pi}_{p_{n-1}}(A) = \sup_{\pi(A) \in \mathcal{P}_{p_1 \dots p_{n-2}}} \pi_{p_{n-1}}(A)$,

где $\mathcal{P}_{p_1 \dots k} = \{\hat{\pi}(A): \hat{\pi}(A) \in \mathcal{P}, \pi_{p_1}(A) = \hat{\pi}_{p_1}(A), \dots, \pi_{p_k}(A) = \hat{\pi}_{p_k}(A)\}$.

Обозначим $V_+^0 = \{v = (v_1, \dots, v_n): v_i > 0, i \in N\}$ и $K(A) = \overline{\delta(A) \cap V_+^0}$ – замыкание границы множества $A \in \mathcal{M}$ в положительном ортанте пространства V_+^0.

Предположим, по аналогии с [1, 2, 6-10], что множества $A \in \mathcal{M}$ с введенным на нем предпочтением $\succcurlyeq$ удовлетворяют следующим требованиям:

T1: $A \in \mathcal{M}$ – компактно;

T2: $(0, \dots, 0) \in A$;

T3: $K(A)$ «охватывает» точку $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ (иначе, любая исходящая из точки $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ уходящая в бесконечность кривая ℓ пересекает $K(A)$;

T4: $K(A) \subset \Pi(A)$;

T5: если $B \succcurlyeq A$, то $B \sqsupseteq A$, где знак «$\sqsupseteq$» означает, что множество B содержит множество A или совпадает с ним.

Справедливо следующее утверждение (доказательство опускаем), которое в обобщенной постановке становится почти тривиальным.

Утверждение 2. Класс $\mathcal{P}$ не пуст.

Как было показано еще в [10], ключевой проблемой при попытке переноса доказательства утверждений, аналогичных утверждению 1 на общий случай является тот факт, что после выбора селектора с монотонной 1-й координатой (если рассматривается подмножество $\mathcal{M}_{1,2,\dots,n}$, например), которая предоставляет *максимальный выигрыш* 1-му игроку, при распределении остатка между остальными игроками может оказаться, что не существует ни одного монотонного селектора, который бы осуществил данное распределение. Таким образом, задача сводится к поиску дополнительных (и не очень жестких) условий на множества $A \in \mathcal{M}$, которые обеспечили бы существование хотя бы одного монотонного селектора при переходе от n-мерной к $(n-1)$-мерной задаче. В [10], где впервые была предложена рассматриваемая арбитражная схема, основанная на принципах «стимуляции» и «неподавления» такого решения предложено не было. В [1, 2, 6-9] возможность доказательства существование МС-селектора в общем случае обеспечивалась тем, что все множества допустимых распределений выигрышей между игроками имели специфический вид – множеств с «плоской границей». Таким образом, представляется целесообразным рассмотреть в качестве дополнительных условий, накладываемых на множества $A \in \mathcal{M}$, те свойства, которыми обладают множества с «плоской границей», и которые были использованы при доказательстве существования МС-селектора в общем случае.

Пусть заданы произвольные множества $A \subset \mathbb{R}_+^k$, $B \subset \mathbb{R}_+^k$, $k \in N = \{1, \dots, n\}$. Будем писать, что $A \supsetneqq B$, если: $A \supset B$ и $K(A) \cap K(B) = \emptyset$.

Для любых $A \subset \mathbb{R}_+^n$ и $k \in \{1, \dots, n-1\}$ выделим в $\mathbb{R}_+^n$ семейство плоскостей вида $V_i^0(a_i) = \{v = (v_1, \dots, v_n): v_i = a_i > 0, i \in N\} \subset \mathbb{R}_+^n$. Обозначим $A_I(a_1, \dots, a_k)$, где $I = \{(i_1, \dots, i_k): i_m, i_l \in$

$N, i_m \neq i_l\}$, проекцию сечения множества A плоскостями вида $V_i^0(a_i)$ на пространство, образованное оставшимися $(n-k)$ координатами.

Для любых $A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{M}$ обозначим:

$\Delta_{inf}(A,B) = \inf_{x \in B, y \in A}|x-y|$ и $\Delta_{sup}(A,B) = \sup_{y \in A} \Delta_{inf}(y,B)$.

Предположим, что в дополнение к требованиям T1-T5 выполнено требование:

T6: если $A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{M}$ и $B \succcurlyeq A$, то для любых $k \in \{1,\dots,n-2\}$, $I = \{(i_1,\dots,i_k): i_m, i_l \in N, i_m \neq i_l\}$, $(x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{R}_+^k$, $(y_1,\dots,y_k) \in \mathbb{R}_+^k$ таких, что множества $B_I(x_1,\dots,x_k)$ и $A_I(y_1,\dots,y_k)$ не пусты, выполнено одно из следующих соотношений:

а) $B_I(x_1,\dots,x_k) \tilde{\subseteq} A_I(y_1,\dots,y_k)$;

б) $B_I(x_1,\dots,x_k) \tilde{\supseteq} A_I(y_1,\dots,y_k)$;

в) $B_I(x_1,\dots,x_k) = A_I(y_1,\dots,y_k)$.

Несложно видеть, что требование T6, во-первых, обеспечивает сохранение выполнения требований T1-T5 при переходе от k-мерной к $(k-1)$-мерной задаче ($k \in \{2,\dots,n-2\}$), а, во-вторых, при $n=2$ выполняется автоматически и, таким образом, утверждение 1, при добавлении требования T6 полностью сохраняет свою силу.

В этих условиях оказываются справедливыми следующий ряд лемм (доказательства опускаем).

Лемма 1. Пусть $A \in \mathcal{M}_p$ (для простоты будем полагать, что $p=(1,2,\dots,n)$), числа x и y таковы, что $x \geq y$, и множества $A_i(x)$ и $A_i(y)$, $i \in N$, не пусты, тогда: $A_i(x) \tilde{\supseteq} A_i(y)$, причем $A_i(x) = A_i(y)$, только в случае, когда $x=y$.

Лемма 2. Пусть $A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{M}$ и $B \succcurlyeq A$, тогда для любого $\pi(\cdot) \in \mathcal{P}$: $B_i(\pi_i(B)) \sqsupseteq A_i(\pi_i(A))$, $i \in N$.

Лемма 3. Пусть $A \in \mathcal{M}_p$, $B \in \mathcal{M}_p$ и $B \succcurlyeq A$ (для простоты будем полагать, что $p=(1,2,\dots,n)$), тогда $B_1(\hat{\pi}_1(B)) \sqsupseteq A_1(\hat{\pi}_1(A))$.

Тогда справедливо следующее утверждение о существовании и единственности МС-селектора в общем виде.

Утверждение 3. Пусть $A \in \mathcal{M}_p$ (для простоты будем полагать, что $p=(1,2,\dots,n)$) и выполнены условия T1-T6, тогда МС-селектор $\hat{\pi}(A) \in A$ существует и единственен.

Доказательство проводится индукцией по n с использованием Лемм 1-3.

Таким образом, в настоящей работе получено существенное обобщение рассмотренной ранее в работах [1-10] арбитражной схемы, основанной на принципах стимуляции и неподавления, путем построения ее аналога без использования понятия «вклада» («заявки») игрока

3 Упорядочивание узлов сети по их рисковому потенциалу

Как было сказано выше в разделе 1, каждую случайную функцию локального риска $\rho_i = \rho_i(\cdot,\cdot)$, $i \in N$, можно рассматривать, как одномерную случайную величину с функцией распределения F_i и считать, что задано некоторое пространство одномерных вероятностных распределений $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N\}$.

Считая значения случайной величины ρ_i, $i \in N$ значениями функции локального риска, представляется достаточно разумным предполагать, что «лучше» то распределение, при котором *меньшие* значения риска (потерь) реализуются с *большими* вероятностями. А среди функций локального риска с одинаковыми «средними» значениями считать «лучше» функцию с меньшим «разбросом» значений риска, поскольку в этом случае вероятность реализации больших рисков (потерь) ниже. Фактически, речь идет о введении некоторого отношения предпочтения «$\succcurlyeq$» в пространстве $\mathcal{F}$.

Сформулируем следующие аксиомы:

A1: если для любых $F_1 \in \mathcal{F}$, $F_2 \in \mathcal{F}$ и $x \in \mathbb{R}^1$ выполнено: $F_1(x) \leq F_2(x)$, то $F_1 \succcurlyeq F_2$.

A2: если для любых $F_1 \in \mathcal{F}$, $F_2 \in \mathcal{F}$ таких, что $E(F_1) = E(F_2) = m_0$ выполнено:

$F_1(x) \leq F_2(x)$ при $x \leq m_0$ и $F_1(x) \geq F_2(x)$ при $x > m_0$, то $F_1 \succcurlyeq F_2$.

Аксиома А1 утверждает, что если имеются две случайные величины, то предпочтение отдается распределению с меньшим центром.

Аксиома А2 утверждает, что если имеется две симметрично распределенные случайные величины с общим центром, то предпочтение отдается распределению с меньшим разбросом.

Естественно, аксиомы А1 и А2 не должны обязательно выполняться в любой модели, хотя они и представляются достаточно разумными. Но если строить модель, исходя из предположений, введенных выше, то необходимость аксиом А1 и А2 представляется достаточно очевидной.

Рассмотрим линейный функционал следующего вида: $U(F) = \int u(x)F(dx)$. Справедливо следующее утверждение (подробнее, см., например, [1]).

Утверждение 4. Пусть $u(x) \in C^2(\mathbb{R}^1)$ и для $x \in \mathbb{R}^1$ выполнено: $\frac{\partial u(x)}{\partial x} > 0$, $\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} < 0$, тогда: аксиомы А1 и А2 выполнены.

Рассмотрим функционал вида $U(F) = \iint u(x,y)F(dx)F(dy)$, который будем называть *квадратичным функционалом*.

Справедливо следующее утверждение (подробнее, см., например, [1]).

Утверждение 5. Пусть $u(x,y) \in C^3(\mathbb{R}^2)$ и для $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ выполнено: $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \geq 0$, $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \geq 0$, $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} \geq 0$, $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} \leq 0$, $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} \leq 0$, $\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^2 \partial y} \leq 0$, $\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x \partial y^2} \leq 0$, тогда: аксиомы А1 и А2 выполнены.

Приведенные выше утверждения дают нам возможность использовать линейные или квадратичные функционалы для упорядочивания узлов сети S по их рисковому потенциалу на основе информации об одномерных случайных величинах ρ_i, с функциями распределения $F_i, i \in N$. Действительно, пусть $F_1 \in \mathcal{F}$, $F_2 \in \mathcal{F}$и заданы функционалы вида $U(F) = \int u(x)F(dx)$ или $U(F) = \iint u(x,y)F(dx)F(dy)$ удовлетворяющие аксиомам А1 и А2, тогда если $U(F_1) \geq U(F_2)$, то можно считать, что $F_1 \succcurlyeq F_2$ и, соответственно, $\rho_1 \succcurlyeq \rho_2$.

Заключение

В настоящей работе рассматривается общая модель управления рисками сложной системы, в рамках которой взаимодействуют два субъекта: «природа» и «защитник». Каждый из субъектов осуществляет воздействие на систему S путем распределения имеющегося в его распоряжении ресурса между ее отдельными элементами $s_i \in S$, $i \in N$. Для оценки состояния элементов системы используются функции локального риска, удовлетворяющие определенным требованиям, а для оценки состояния системы в целом – функция интегрального риска. При этом считается, что «природа» воздействует на элементы системы случайным образом, а «защитник» пытается снизить локальные риски отдельных элементов осуществляя в том или ином смысле эффективное распределение ресурса между ними.

В ранних работах авторов (см., например, [3-5]) предполагалось, что все функции локального риска являются детерминированными, однако информация об их конкретном виде у субъекта управления отсутствует. В этих условиях было показано, что в случае отсутствия взаимного влияния отдельных элементов системы друг на друга для нахождения эффективного распределения ресурса может быть использован теоретико-игровой подход на основе монотонной арбитражной схемы (МС-решение), ключевым элементом которого является возможность иерархического упорядочивания локальных рисков.

В настоящей работе указанный подход обобщается на случай, когда функции локальных рисков отдельных узлов могут являться, вообще говоря, случайными функциями. Для чего вводится понятие обобщенной арбитражной схемы, основанной на принципах стимуляции и неподавления и доказывается существование и единственность обобщенного МС-решения.

В качестве механизма упорядочивания локальных рисков предложено использовать линейные или квадратичные функционалы специального вида, удовлетворяющих заданным требованиям.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 18-29-22042).

Литература

1. *Калашников, А.О.* Модели и методы организационного управления информационными рисками корпораций // А.О. Калашников – М.: Эгвес, 2011. – 312 с. – ISBN 978-5-91450-078-5;
2. *Калашников, А.О.* Организационные механизмы управления информационными рисками корпораций // А.О. Калашников – М.: ПМСОФТ, 2008. – 175 с. – ISBN 978-5-9900281-9-7;
3. Модели управления информационными рисками сложных систем / А.О. Калашников, Е.В. Аникина // Информация и безопасность. – 2020. – Том 23. – № 2(4). – С. 191-202
4. Management of Risks for Complex Computer Network / A.O. Kalashnikov, E.V. Anikina // Proceedings of the 23rd International Conference on Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications (DCCN-2020, Moscow). – Cham: Springer, 2020. – vol 1337. – С. 144-157;
5. *Калашников А.О., Аникина Е.В.* Арбитражная модель управления информационными рисками значимых объектов критической информационной инфраструктуры / Труды 13-й Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2020, Москва) , под общей редакцией С.Н.Васильева, А.Д.Цвиркуна, М.: ИПУ РАН, 2020. С. 1400-1406;
6. Управление информационными рисками с использованием арбитражных схем / А.О. Калашников // Системы управления и информационные технологии. – 2004. – № 4 (16). – С. 57-61;
7. Арбитражная модель управления информационными рисками организационных систем / А.О. Калашников // Системы управления и информационные технологии. – 2006. – № 3 (25). – С. 41-45;
8. «Максимально стимулирующее» решение в задаче управления информационными рисками организационных систем / А.О. Калашников // Системы управления и информационные технологии. – 2006. – № 3(25). – С. 45-51;
9. Анализ частных случаев «максимально стимулирующего» решения в задаче управления информационными рисками организационных систем / А.О. Калашников // Системы управления и информационные технологии. – 2006. – № 4(26). – С. 53-59;
10. О принципе стимуляции в арбитражной схеме / В.И. Ротарь // Экономика и математические методы – 1984. – т. XVII. в. 4. – С. 751-764.