ОПТИМИЗАЦИЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НЕОДНОРОДНОГО КОМПЛЕКСА РЕСУРСОВ ПРИ РЕГИОНАЛЬНОМ ПЛАНИРОВАНИИ

Кононов Д.А.

Российский государственный гуманитарный университет,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная, д.65
dmitrykon52@gmail.com,

Фуругян М.Г.

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,
Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40
rtsccas@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача построения допустимого расписания выполнения сложного комплекса работ. Предполагается наличие различных типов ресурсов (возобновляемых и невозобновляемых), имеющих непостоянные во времени объемы. Рассмотрены случаи прерывания и совместного выполнения работ. Предложены приложения рассмотренных моделей к решению задач регионального управления.

Ключевые слова: возобновляемые и невозобновляемые ресурсы, исполнительные механизмы, допустимое расписание, сетевая модель, поток минимальной стоимости.

Введение

При региональном и муниципальном управлении часто возникают задачи распределения ресурсов и составления расписаний выполнения сложного комплекса работ. Примером могут служить работы по проектированию, возведению и сопровождению сложных технических объектов (летательные аппараты, атомные реакторы), реализации инфраструктурных проектов (дорожное строительство, ирригационные и экологические системы, оптимизация транспортных маршрутов), проведению различных испытаний в реальном масштабе времени, проектированию систем ПВО и ПРО, обработке больших массивов информации технического, экономического и экологического характера. Задачи распределения невозобновляемых ресурсов (финансы, топливо, электроэнергия, специализированные материалы) успешно решаются при строительстве военных и гражданских объектов и создании вооружений с помощью систем ПЕРТ (метод оценки и пересмотра планов) и МКП (метод критического пути) [1]. При использовании этих систем предполагается, что длительности работ линейно зависят от величины выделенного им ресурса. Указанные методы позволяют решать, как задачи минимизации времени выполнения проекта, так и задачи минимизации стоимости используемых ресурсов.

В отличие от невозобновляемых ресурсов возобновляемые ресурсы (исполнительные механизмы, машины, процессоры, приборы, рабочие) допускают многократное использование. Проблемам построения оптимальных расписаний и распределения возобновляемых ресурсов посвящено большое количество публикаций. Отметим такие фундаментальные работы, как [2 - 4], в которых исследованы различные задачи составления расписаний (составление однопроцессорных и многопроцессорных расписаний, решение задач на быстродействие и задач с директивными сроками, составление расписаний для прерываемых и непрерываемых работ и многие другие задачи). Задачи распределения невозобновляемых ресурсов с нефиксированными параметрами исследованы в [5]. В настоящей работе рассмотрены вопросы оптимизации управления заданиями и ресурсами проекта при изменяющихся длительностях работ, предложен метод ветвей и границ получения оптимального решения, разработаны методы оценки устойчивости расписаний при выполнении непрерываемых работ проекта при различных способах задания изменения их длительности. В случае, когда длительности работ заданы как случайные величины, предложена двухкритериальная модель оценки эффективности расписания.

В настоящей статье рассматривается задача планирования комплекса работ, при выполнении которых используются как возобновляемые (исполнительные механизмы), так и невозобновляемые ресурсы. Работы характеризуются объемами и директивными интервалами. Изучаются также варианты, когда допускаются прерывания и переключения с одного исполнительного механизма на другой. При выполнении определенных ограничений допускается одновременное выполнение одной работы несколькими исполнительными механизмами. Предполагается, что исполнительные механизмы могут различаться своей производительностью.

Характерные задачи исследования подобных моделей заключаются в поиске необходимых и достаточных условий существования допустимого расписания при заданных объемах ресурсов. Для рассматриваемых формальных моделей приводятся найденные условия в виде соответствующих утверждений. Разработан алгоритм построения допустимого распределения ресурсов минимальной стоимости, а для случая, когда исполнительные механизмы идентичные, определено минимально допустимое их количество. Решение указанных задач основано на сведении их к задаче о максимальном потоке и задаче о потоке минимальной стоимости в сетях специального вида.

1 Постановка задачи

На горизонте планирования [0,T] следует выполнить комплекс работ (заданий) J={J1, J2,…, Jn}с использованием двух видов ресурсов – возобновляемых (исполнительных механизмов) и невозобновляемых. Интервал [0,T] разбивается на h непересекающихся интервалов T1, T2, …, Th (Tj=[tj, tj+1], $j=\overline{1,h}$, 0= t1<t2< … <th+1 = T), Δj=tj–tj+1 – длина интервала Tj. Ресурсы обоих видов выделяются работам в каждом отдельном интервале Tj. Число доступных исполнительных механизмов в интервале Tj составляет mj, их производительности равны pj1≤ pj2≤ … ≤pjmj, Pj $=\sum_{l=1}^{m_j} p_{jl}$ – их суммарная производительность, $j=\overline{1,h}$. Если исполнительные механизмы с суммарной производительностью p в интервале Tj выполняют некоторое задание в течение интервала времени Δ, то суммарный объем производимый ими работы при этом составляет $a_j \Delta p$, а стоимость эксплуатации этих исполнительных механизмов равна $c_j a_j \Delta p$ (a_j, c_j – заданные положительные величины). В фиксированный момент времени каждый исполнительный механизм может выполнять не более одного задания. Однако, допускается параллельное выполнение одного задания несколькими исполнительными механизмами (при ограничениях, которые будут указаны ниже).

Помимо исполнительных механизмов имеется K типов невозобновляемых ресурсов. Доступный объем невозобновляемого ресурса k-го типа в интервале T_j составляет R_{jk}, $j=\overline{1\ h}$, $k=\overline{1\ K}$. Использование в интервале T_j невозобновляемого ресурса k-типа в объеме r_{jk} обеспечивает объем работы, равный $b_{jk} r_{jk}$, а его стоимость равна $d_{jk} b_{jk} r_{jk}$ (b_{jk}, d_{jk} – заданные положительные величины).

Каждая работа $J_i \in J$ может выполняться с использованием обоих видов ресурсов (возобновляемых и невозобновляемых), допускает прерывания и переключения с одного исполнительного механизма на другой. Предполагается, что прерывания и переключения не требуют временных затрат.

Заданы следующие характеристики заданий: V_i – объем задания $J_i \in J$, $[b_i;\ f_i]$ – его директивный интервал (т.е. задание J_i может выполняться только в этом интервале; предполагается, что $b_i,\ f_i \in \{t_1, t_2, \dots, t_{h+1}\}$); v_{ij}^0 – максимально допустимый суммарный объем работы исполнительных механизмов, выполняющих задание J_i в интервале T_j; r_{ijk}^0 – максимальный объем невозобновляемого ресурса k-го типа, который может быть выделен заданию J_i в интервале T_j. Ресурсы каждого вида могут быть выделены работе J_i в интервале T_j только в том случае, когда $T_j \subseteq [b_i;\ f_i]$, т.е. когда задание J_i может выполняться в интервале T_j.

Если при выполнении задания J_i в интервале Tj суммарный объем работы исполнительных механизмов составляет v_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,h}$, то должны выполняться следующие ограничения:

$$v_{ij} \le v_{ij}^0,\ \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{n}},\ \mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{h}}. \qquad (1)$$

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{v_{ij}} \le \mathrm{Pj}\Delta\mathrm{j},\ \mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{h}}. \qquad (2)$$

Если заданию J_i в интервале Tj выделяется невозобновляемый ресурс k-го типа в объеме r_{ijk}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,h}$, $k=\overline{1,K}$, то должны выполняться следующие ограничения:

$$r_{ijk} \le r_{ijk}^0,\ \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{n}},\ \mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{h}},\ \mathrm{k}=\overline{1,\mathrm{K}}, \qquad (3)$$

$\sum_{i=1}^{n} r_{ijk} \leq$Rjk, $j = \overline{1,h}$, $k = \overline{1,K}$. (4)

Распределение ресурсов указывает для каждой работы $J_i \in J$ и каждого момента времени t∈[0,T] исполнительные механизмы, выполняющие ее. А для каждого интервала Tj, $j = \overline{1,h}$, распределение ресурсов определяет типы невозобновляемых ресурсов, выделенные каждому заданию, и объемы этих ресурсов. При этом должны выполняться условия (1)–(4). То же определяет и расписание выполнения работ J. Поэтому в дальнейшем, говоря о распределении ресурсов, мы будем иметь в виду также и расписание выполнения работ. Допустимым распределением ресурсов (расписанием) называется такое распределение (расписание), при котором каждая работа полностью выполняется в своем директивном интервале. Требуется определить, существует ли допустимое распределение ресурсов (расписание), и в случае положительного ответа (а) найти это распределение; (б) определить допустимое распределение ресурсов с минимальной стоимостью их эксплуатации. Кроме того, в случае, когда имеются только исполнительные механизмы и их производительности совпадают, требуется определить минимальное их число, при котором существует допустимое расписание.

2 Решение задачи с помощью сетевого моделирования

Решение поставленной задачи основано на построении сетевой модели и нахождении потока, обладающего определенными свойствами. Так, в случае определения распределения ресурсов минимальной стоимости исходная задача будет сведена к задаче о потоке минимальной стоимости в сети специального вида. При нахождении минимального числа исполнительных механизмов задача будет сведена к задаче о максимальном потоке.

2.1 Построение сетевой модели

Построим потоковую сеть $H_1 = (N_1, E_1)$, где $N_1 = \{s, t, T_j, T_{jk}, J_i,\ j = \overline{1,h},\ k = \overline{1,K},\ i = \overline{1,n}\}$ – множество узлов, u – источник, t – сток, $E_1 = \{(s, T_j), (s, T_{jk}), (T_j, J_i), (T_{jk}, J_i), (J_i, t)$, $j = \overline{1,h},\ k = \overline{1,K},\ i = \overline{1,n}\}$ – множество ориентированных дуг. Дуги (T_j, J_i) и (T_{jk}, J_i) вводятся в сеть H_1 только в том случае, когда $T_j \subseteq [b_i;\ f_i]$, т.е. если задание J_i может выполняться в интервале T_j. Отметим, что узел J_i соответствует заданию J_i, узел T_j – интервалу T_j, а узел T_{jk} – интервалу T_j и невозобновляемому ресурсу k-го типа.

Припишем каждой дуге $(x, y) \in E_1$ три параметра: нижнюю границу $L(x, y)$ потока по дуге (x, y), верхнюю границу $U(x, y)$ потока по дуге (x, y) и стоимость $C(x, y)$ единицы потока по дуге (x, y). Значения этих параметров приведены в таблице. Поясним физический смысл некоторых из этих значений. Величина $a_j P_j \Delta_j$ равна максимальному объему работы исполнительных механизмов, доступному для заданий, которые могут выполняться в интервале T_j. Величина $b_{jk} R_{jk}$ равна максимальному объему работы, который может быть выполнен в интервале T_j с помощью невозобновляемого ресурса k-го типа. Величина $b_{jk} r_{ijk}^0$ равна максимальному объему работы, который может быть предоставлен заданию J_i в интервале T_j с помощью невозобновляемого ресурса k-го типа. Остальные величины были определены выше.

Рассмотрим поток $e(x, y)$ по дугам $(x, y) \in E_1$ сети H_1. Физический смысл потока $e(x, y)$ следующий. Величина $e(s, T_j)$ равна суммарному объему работы исполнительных механизмов в интервале в интервале T_j; величина $e(s, T_{jk})$ − суммарному объему работы, предоставляемому в интервале T_j с помощью невозобновляемого ресурса k-го типа. Величина $e(T_j, J_i)$ равна объему работы исполнительных механизмов по выполнению задания J_i в интервале T_j; величина $e(T_{jk}, J_i)$ − объему работы, предоставляемому заданию J_i в интервале T_j с помощью невозобновляемого ресурса k-го типа. Наконец, величина $e(J_i, t)$ равна суммарному объему работы по выполнению задания J_i всеми ресурсами (возобновляемыми и невозобновляемыми) во всех интервалах T_j, $j = \overline{1,h}$.

Таблица 1. Значения параметров дуг сети H_1

Дуга	Нижняя граница потока (*L*)	Верхняя граница потока (*U*)	Стоимость единицы потока (*C*)
(s, T_j)	0	$a_j P_j \Delta_j$	0
(s, T_{jk})	0	$b_{jk} R_{jk}$	0
(T_j, J_i)	0	v_{ij}^0	c_j
(T_{jk}, J_i)	0	$b_{jk} r_{ijk}^0$	d_{jk}
(J_i, t)	V_i	V_i	0

2.2 Существование допустимого распределения ресурсов и минимизация его стоимости

Решение вопроса о существовании допустимого распределения ресурсов в сформулированной задаче и минимизации его стоимости основано на следующих утверждениях.

Утверждение 1. Допустимое распределение ресурсов (и допустимое расписание) существует тогда и только тогда, когда в сети H_1 существует некоторый поток.

Это утверждение доказывается по аналогии с тем, как это сделано в [6].

Утверждение 2. Допустимое распределение ресурсов (и допустимое расписание) минимальной стоимости определяется потоком минимальной стоимости в сети H_1.

Доказательство. Пусть в сети H_1 существует поток и пусть e − поток минимальной стоимости. Суммарный объем v_{ij} работы исполнительных механизмов при выполнении задания J_i в интервале Tj определим следующим образом: $v_{ij} = e(T_j, J_i)$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,h}$. Поскольку величина $e(T_j, J_i)$ не превосходит верхней границы потока по дуге (T_j, J_i), то $v_{ij} \le v_{ij}^0$, т.е. выполнено (1). В силу сохранения потока в узле Tj справедливо равенство $\sum_{i=1}^{n} v_{ij} \le e(s, T_j)$.

Поскольку величина $e(s, T_j)$ не превосходит верхней границы потока по дуге (s, T_j), то выполнено (2). Поэтому для распределения исполнительных механизмов между заданиями в интервале T_j можно воспользоваться алгоритмом, аналогичным алгоритму компоновки [6]. При работе этого алгоритма задания назначаются на исполнительные механизмы поочередно, начиная с первого. К выбранному заданию J_i исполнительные механизмы приписываются последовательно, начиная с первого не полностью загруженного, до тех пор, пока не будет обеспечен объем работы, равный v_{ij}.

Далее, величину r_{ijk} невозобновляемого ресурса k-го типа, выделяемого заданию J_i в интервале Tj, определим следующим образом: $r_{ijk} = e(T_{jk}, J_i)/b_{jk}$ $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,h}$, $k = \overline{1,K}$. Поскольку величина $e(T_{jk}, J_i)$ не превосходит верхней границы потока по дуге (T_{jk}, J_i), то $r_{ijk} \le b_{jk} r_{ijk}^0 / b_{jk} = r_{ijk}^0$, т.е. выполнено (3). В силу сохранения потока в узле T_{jk} справедливо равенство

$\sum_{i=1}^{n} e(T_{jk}, J_i)$=e(s, Tjk).

Поскольку величина $e(s, T_{jk})$ не превосходит верхней границы потока по дуге (s, T_{jk}), то справедливы следующие соотношения:

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ijk} = (\sum_{i=1}^{n} e(T_{jk}, J_i))/b_{jk} = e(s, T_{jk})/b_{jk} \le b_{jk} R_{jk} / b_{jk} = R_{jk}, \quad j = \overline{1,h}, \quad k = \overline{1,K}, \quad i = \overline{1,n},$$

т.е. выполнено (4). Кроме того, в силу равенства $e(J_i, t) = V_i$ и сохранения потока в узле J_i суммарный объем работы по выполнению задания J_i равен

$$\sum_{j=1}^{h} (v_{ij} + \sum_{k=1}^{K} b_{jk} r_{ijk}) = \sum_{j=1}^{h} (e(T_j, J_i) + \sum_{k=1}^{K} e(T_{jk}, J_i)) = e(w_i, t) = V_i,$$

т.е. работа J_i, $i=\overline{1,n}$, выполняется полностью. И наконец, структура сети H_1 такова, что каждое задание выполняется в своем директивном интервале, т.е. поток e определяет допустимое распределение ресурсов.

Далее, из табл. 1 видно, что стоимость потока в сети H_1 определяется стоимостью потока по дугам (T_j, J_i) и (T_{jk}, J_i), $j=\overline{1,h},\ k=\overline{1,K},\ i=\overline{1,n}$. Поэтому поток минимальной стоимости в сети H_1 определяет распределение ресурсов минимальной стоимости. Утверждение доказано.

Из утверждений 1, 2 вытекает следующий алгоритм решения поставленной задачи.

Шаг 1. Построить сеть H_1.

Шаг 2. Найти в сети H_1 поток e минимальной стоимости (например, с помощью псевдополиномиального алгоритма дефекта [7, 8]). Если в сети H_1 поток существует, то перейти на шаг 3. Если же потока в сети H_1 не существует, то перейти на шаг 4.

Шаг 3. Допустимое распределение ресурсов (и допустимое расписание для J) существует, может быть построено в каждом интервале T_j, $j=\overline{1,h}$, с помощью утверждения 2, и оно будет допустимым распределением ресурсов минимальной стоимости. Алгоритм завершен.

Шаг 4. Допустимого распределения ресурсов (и допустимого расписания) не существует. Алгоритм завершен.

Оценим вычислительную сложность каждого шага алгоритма. Шаг 1 – $O((Kh+n)^2)$, шаг 2 – $O((Khn)^2U)$, где U – это максимальная верхняя граница потока по дугам сети H_1, шаг 3 – $O(h(n+K))$. Таким образом, вычислительная сложность предложенного алгоритма составляет $O((Khn)^2U)$, т.е. алгоритм является псевдополиномиальным.

Рассмотрим теперь задачу минимизации суммарного объема работы, выполняемой возобновляемыми и невозобновляемыми ресурсами в заданной совокупности интервалов T_i, при условии существования допустимого распределения ресурсов. Для этого будем определенным образом задавать значения параметров сети H_1 и определять поток минимальной стоимости, с помощью которого будем строить искомое распределение ресурсов, как это указано при доказательстве утверждения 2.

Пусть требуется минимизировать суммарный объем работы, выполняемый исполнительными механизмами в интервалах T_j, $j\in D$, где $D\subseteq\{1,2,\ldots,h\}$. Нижние и верхние границы потока по дугам сети H_1 оставим равными значениям, указанным в таблице. Стоимости единицы потока по дугам сети H_1 зададим следующим образом: положим $C(s,T_j)=1$ при всех $j\in D$, $C(x,y)=0$ для всех остальных дуг сети H_1. Поскольку в сети H_1 с помощью алгоритма дефекта определяется поток минимальной стоимости, то суммарный поток по дугам (s,T_j) $j\in D$, т.е. значение суммы $\sum_{j\in D} e(s,T_j)$, будет минимальным. В силу того, что указанная сумма равна суммарному объему работы, выполняемому исполнительными механизмами в интервалах T_j, $j\in D$, указанный объем работы будет минимальным.

Рассмотрим теперь задачу минимизации числа исполнительных механизмов, используемых в интервале T_{j_0}. В этом случае $D=\{j_0\}$ (т.е. множество D состоит из одного элемента j_0). Будем предполагать также, что все исполнительные механизмы, доступные в интервале T_{j_0}, идентичные, т.е. имеют одну и туже производительность. В этом случае стоимость потока в сети H_1 определяется только величиной потока по дуге (s,T_{j_0}). А поскольку алгоритм дефекта находит поток минимальной стоимости в сети H_1, то и величина потока по дуге (s,T_{j_0}), которая определяет суммарный объем работы исполнительных механизмов в интервале T_{j_0}, будет минимальной. Следовательно, после применения алгоритма компоновки число исполнительных механизмов, выполняющих задания в интервале T_{j_0}, также будет минимальным.

Рассмотрим теперь задачу минимизации суммарного объема работы, выполняемой невозобновляемыми ресурсами k-го типа, где $k\in X$, $X\subseteq\{1,2,\ldots,K\}$, в интервалах T_j, $j\in D$. Для этого значения нижних и верхних границ потока по дугам сети H_1 оставим равными значениям, указанным в таблице. Стоимости единицы потока по дугам сети H_1 определим следующим образом: положим $C(s, T_{jk}) = 1$ при всех $j \in D$, $k \in X$, и $C(x, y) = 0$ для всех остальных дуг сети H_1. В этом случае при поиске потока минимальной стоимости в сети H_1 с помощью алгоритма дефекта будет минимизироваться суммарный поток по дугам $(u, T_{jk}) = 1$, $j \in J$, $k \in X$. Следовательно, и суммарный объем работы, выполняемый невозобновляемыми ресурсами k-го типа, $k \in X$, в интервалах T_j, $j \in D$, также будет минимальным.

Аналогично решается задача минимизации суммарного объема работы, выполняемой возобновляемыми и невозобновляемыми ресурсами заданных типов в определенной совокупности интервалов T_j.

2.3 Минимизация числа исполнительных механизмов при жестких директивных интервалах

В этом разделе будем предполагать, что при выполнении комплекса работ J используются только исполнительные механизмы (т.е. возобновляемые ресурсы), а других ресурсов в системе нет. Кроме того, предполагается, что все исполнительные механизмы идентичные, т.е. имеют одну и ту же производительность. В фиксированный момент времени каждый исполнительный механизм может выполнять не более одного задания. Параллельное выполнение одной работы несколькими исполнительными механизмами не допускается. Исполнительный механизм выполняет работу J_i в течение всего ее директивного интервала $[b_i, f_i]$ до полного ее завершения. После выполнения работы J_i исполнительный механизм может переключиться на другую работу J_j. Время, необходимое исполнительному механизму для такого переключения, равно τ_{ij}. Требуется определить минимальное число исполнительных механизмов, при котором можно полностью выполнить всю совокупности работ J.

Для решения этой задачи построим потоковую сеть $H_2 = (N_2, E_2)$, где $N_2 = \{s, J_1, ..., J_n, I_1, ..., I_n, t\}$ – множество узлов, s – источник, t – сток, узлы J_i и I_i соответствуют заданию J_i; $E_2 = \{(s, J_i), (I_i, t), (J_i, I_j),\ i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, n}\}$ – множество ориентированных дуг. Дуга (J_i, I_j) вводится в сеть H_2 в том случае, когда $f_i + \tau_{ij} \le b_i$, т.е. если исполнительный механизм после выполнения задания J_i успевает переключиться на работу J_j. Каждая дуга сети H_2 имеет один параметр – пропускную способность. Пропускные способности всех дуг полагаются равными единице.

Утверждение 3. Минимальное число исполнительных механизмов. при котором можно полностью выполнить всю совокупности работ J равно $n–L$, где L − величина максимального потока в сети H_2.

Доказательство. Отметим, что, используя для нахождения максимального потока в сети H_2 полиномиальный алгоритм поднять-и-в-начало (lift-to-front) [7, 8], полученный поток будет целочисленным, поскольку пропускные способности всех дуг сети H_2 целочисленные. Следовательно, величина потока по каждой дуге (J_i, I_j) равна нулю или единице. Очевидно, что для выполнения всего комплекса работ заведомо достаточно n исполнительных механизмов. Каждой единице потока в сети H_2 соответствует путь из источника в сток, проходящий через некоторую дугу (J_i, I_j), поток по которой также равен единице. Структура сети H_2 такова, что в этом случае один исполнительный механизм сможет выполнить сначала задание w_i, а затем w_j. Это уменьшает число используемых исполнительных механизмов на единицу. Поэтому если величина максимального потока равна L, то минимальное число исполнительных механизмов, с помощью которых можно выполнить задания J, равно $n–L$.

Заключение

В настоящей работе исследована задача планирования комплекса работ, при выполнении которых используются как возобновляемые ресурсы (исполнительные механизмы), так и невозобновляемые ресурсы различных типов. Работы характеризуются объемами и директивными интервалами. Предполагается, что возможны прерывания и переключения с одного исполнительного механизма на другой. При выполнении определенных ограничений допускается одновременное выполнение одной работы несколькими исполнительными механизмами. Предполагается, что исполнительные механизмы могут различаться своей производительностью. Получены необходимые и достаточные условия существования допустимого расписания при заданных объемах ресурсов. Разработан алгоритм построения допустимого распределения ресурсов минимальной стоимости, а для случая, когда исполнительные механизмы идентичные, определено минимально допустимое их число. Методика решения указанных задач основана на сведении их к задаче о максимальном потоке и задаче о потоке минимальной стоимости в сетях специального вида.

Дальнейшее развитие рассмотренных исследований возможно в направлении изучения допустимых условий управления комплексами работ в условиях неопределенности, в том числе на основе применения вероятностной, игровой и конкурентной моделей выполнения контрактов, заключаемых региональными и муниципальными заказчиками.

Литература

1. *Филлипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей. – М.: Мир, 1984.
2. *Танаев В.С., Гордон В.С., Шафранский Я.М.* Теория расписаний. Одностадийные системы. – М.: Наука, 1984.
3. *Brucker P.* Scheduling Algorithms. Heidelberg: Springer, 2007.
4. *Лазарев А.А.* Теория расписаний. Оценка абсолютной погрешности и схема приближенного решения задач теории расписаний. – М.: МФТИ, 2008.
5. *Мищенко А.В., Кошелев П.С.* Оптимизация управления работами логистического проекта в условиях неопределенности // Известия РАН. Теория и системы управления. 2021, № 4. Р.86-101.
6. *Кононов Д.А., Фуругян М.Г.* Распределение неоднородного комплекса ресурсов при региональном управлении. Материалы тринадцатой международной конференции “Управление развитием крупномасштабных систем. MLSD'2020. (28 – 30 сентября 2020 г., Москва) , под общей редакцией С.Н.Васильева, А.Д.Цвиркуна, – М.: ИПУ РАН. С. 1298 – 1305.
7. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К.* Алгоритмы. Построение и анализ (Второе издание.) – М.: Вильямс, 2005.

8 *Корте Б., Фиген Й.* Комбинаторная оптимизация. Теория и алгоритмы. – М.: МЦНМО, 2015.