АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ВЕРОЯТНОСТИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ КРУПНОМАСШТАБНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ МИНИМАЛЬНО НЕОБХОДИМОМ ЧИСЛЕ РАЗНОРОДНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НАГРУЖЕННОГО РЕЗЕРВА

Романчева Н.И.

ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет гражданской авиации» (МГТУ ГА), Россия, г. Москва, Кронштадтский бульвар, д.20

n.Romancheva@mstuca.aero,

Кривопалов Д.М., Юркевич Е.В.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная д.65

persival92@rambler.ru, yurkevitch.evgenij@yandex.ru

Аннотация: Разработаны алгоритмы расчета вероятности безотказной работы крупномасштабной системы при минимально необходимом числе разнородных элементов. Введение аналитической зависимости внутри предлагаемого алгоритма обуславливает высокую точность и скорость регулирования работы группировки при выполнении полетных заданий на основании сопоставления альтернативных вариантов типов летательных аппаратов.

Ключевые слова: вероятность безотказной работы крупномасштабной системы, алгоритм, аналитическая зависимость, группировка летательных аппаратов, разнородные элементы, необходимое число элементов нагруженного резерва, автоматизация управления.

Введение

Большой ряд современных технологий решения задач хозяйственного и оборонно-промышленного комплекса ориентирован на целевое использование группировок пилотируемых и беспилотных летательных аппаратов (ЛА). Количество аппаратов в таких группировках практически не ограничено.

Размеры применяемых группировок и широта решаемых ими задач обуславливают их рассмотрение как крупномасштабные системы. Существенной особенностью этих систем является то, что аппараты, входящие в группировки, могут иметь различные значения показателей надежности и динамику их изменения, в том числе при конструктивной идентичности самих аппаратов.

В данной работе ставится задача с помощью алгоритмов расчета вероятности безотказной работы (ВБР) показать возможности обеспечения эффективности управления и прогнозирования динамики технического состояния и надежности такой группировки. Необходимость обеспечения заданной ВБР в сочетании с требованиями эффективности выполнения заданий предполагает задействование минимального набора ЛА из состава управляемой группировки. В этом случае остальные члены группировки могут рассматриваться как потенциальный функциональный резерв. В полете аппараты взаимодействуют одновременно, поэтому в работе они рассматриваются как нагруженный резерв.

Современные методы расчета показателей надежности позволяют получать их значения, но не предполагают аналитическое представление (построение функциональной зависимости) [1,2]. Это затрудняет их использование в системах автоматизации управления. Важность такого фактора повышается, когда необходимо обеспечение быстродействия и/или точности [3,4]. При изменениях условий работы группировки для каждого нового задания возникает необходимость формирования новой модели группировки, с новыми исходными данными и характеристиками технического состояния ее элементов [5,6].

Для обеспечения непрерывности алгоритма управления такой группировкой ставится проблема введения автоматизации в процесс моделирования ее состояний. При этом возникает необходимость построения аналитических зависимостей показателей надежности от времени работы, как отдельных ЛА, так и всей группировки в целом [7,8].

Обобщение поставленной проблемы определяет постановку задачи получения алгоритмов формирования аналитического вида функции надежности нагруженного резерва для произвольного подмножества из произвольного множества элементов крупномасштабной системы.

1 Алгоритмы расчета ВБР системы в нагруженном резерве при минимально необходимом числе исправных элементов

Пусть имеется система из пяти элементов ($N = 5$), соединенных по схеме нагруженного резервирования как показано на рис. 1. Пусть для корректной работы этой системы достаточно чтобы были исправны три элемента ($k = 3$). Пусть 1-й и 2-й элементы имеют интенсивности отказов λ_1, 3-й и 4-й – λ_2, а 5-й – λ_3.

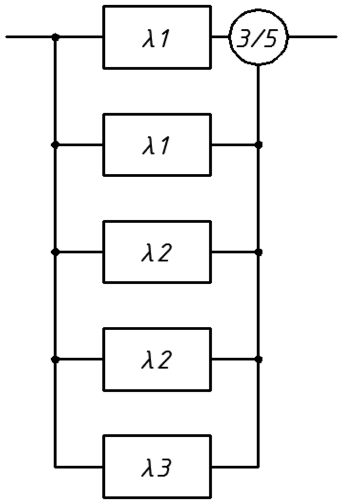

Рис. 1. Структурная схема надежности подключения элементов по схеме нагруженного резерва

Правила комбинаторики и положения теории вероятности определили вид функции надежности такой системы:

$$P(t) = \left[e^{-\lambda_1 \cdot t} \cdot e^{-\lambda_1 \cdot t} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot t} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot t} \cdot e^{-\lambda_3 \cdot t}\right] +$$

$$+\begin{bmatrix} 2 \cdot e^{-\lambda_1 \cdot t} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot t} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot t} \cdot e^{-\lambda_3 \cdot t} \cdot \left(1 - e^{-\lambda_1 \cdot t}\right) + \\ +2 \cdot e^{-\lambda_1 \cdot t} \cdot e^{-\lambda_1 \cdot t} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot t} \cdot e^{-\lambda_3 \cdot t} \cdot \left(1 - e^{-\lambda_2 \cdot t}\right) + \\ +e^{-\lambda_1 \cdot t} \cdot e^{-\lambda_1 \cdot t} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot t} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot t} \cdot \left(1 - e^{-\lambda_3 \cdot t}\right) \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} e^{-\lambda_2 \cdot t} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot t} \cdot e^{-\lambda_3 \cdot t} \cdot \left(1 - e^{-\lambda_1 \cdot t}\right) \cdot \left(1 - e^{-\lambda_1 \cdot t}\right) + \\ +e^{-\lambda_1 \cdot t} \cdot e^{-\lambda_1 \cdot t} \cdot e^{-\lambda_3 \cdot t} \cdot \left(1 - e^{-\lambda_2 \cdot t}\right) \cdot \left(1 - e^{-\lambda_2 \cdot t}\right) + \\ +2 \cdot e^{-\lambda_1 \cdot t} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot t} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot t} \cdot \left(1 - e^{-\lambda_1 \cdot t}\right) \cdot \left(1 - e^{-\lambda_3 \cdot t}\right) + \\ +2 \cdot e^{-\lambda_1 \cdot t} \cdot e^{-\lambda_1 \cdot t} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot t} \cdot \left(1 - e^{-\lambda_2 \cdot t}\right) \cdot \left(1 - e^{-\lambda_3 \cdot t}\right) + \\ +4 \cdot e^{-\lambda_1 \cdot t} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot t} \cdot e^{-\lambda_3 \cdot t} \cdot \left(1 - e^{-\lambda_1 \cdot t}\right) \cdot \left(1 - e^{-\lambda_2 \cdot t}\right) \end{bmatrix} =$$

$$= 2 \cdot e^{-(\lambda_1 + 2\lambda_2) \cdot t} + 2 \cdot e^{-(2\lambda_1 + \lambda_2) \cdot t} + e^{-(2\lambda_1 + \lambda_3) \cdot t} + e^{-(2\lambda_2 + \lambda_3) \cdot t} -$$

$$-3 \cdot e^{-(2\lambda_1 + 2\lambda_2) \cdot t} + 4 \cdot e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \cdot t} - 6 \cdot e^{-(2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \cdot t} - 6 \cdot e^{-(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3) \cdot t} +$$

$$+6 \cdot e^{-(2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3) \cdot t}$$

В соответствии с предложенным построением, далее функцию надежности будем рассматривать как сумму экспоненциальных функций, умноженных на соответствующий коэффициент.

Рассмотрим возможность алгоритмизации решения класса задач расчета надежности крупномасштабной системы из N элементов. Каждый из элементов характеризуется некоторым значением ВБР $p_1, p_2, \dots, p_N$. Ставится задача получить выражение ВБР этой системы в целом, если она находится в нагруженном резерве при минимально необходимом числе исправных элементов(k).

Искомый алгоритм предлагается формировать на основе метода индукции. Для этого последовательно рассмотрим схемы резервирования, переходя от простых к сложным.

Для $N = 1$, $k = 1$ функция ВБР системы имеет вид:

$$P_s(p_1) = p_1$$

Для $N = 2$, $k = 2$ функция ВБР системы имеет вид:

$$P_s(p_1, p_2) = p_1 \cdot p_2$$

Для $N = 2$, $k = 1$ функция ВБР системы имеет вид:

$$P_s(p_1, p_2) = p_1 \cdot p_2 + (1 - p_1) \cdot p_2 + p_1 \cdot (1 - p_2) =$$
$$= (p_1 + p_2) - (p_1 \cdot p_2)$$

Для $N = 3$, $k = 3$ функция ВБР системы имеет вид:

$$P_s(p_1, p_2, p_3) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \tag{1}$$

Для $N = 3$, $k = 2$ функция ВБР системы имеет вид:

$$P_s(p_1, p_2, p_3) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 +$$
$$+(1 - p_1) \cdot p_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot (1 - p_2) \cdot p_3 + p_1 \cdot p_2 \cdot (1 - p_3) =$$
$$= (p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_3) - 2 \cdot (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3) \tag{2}$$

Для $N = 3$, $k = 1$ функция ВБР системы имеет вид:

$$P_s(p_1, p_2, p_3) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 +$$
$$+(1 - p_1) \cdot p_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot (1 - p_2) \cdot p_3 + p_1 \cdot p_2 \cdot (1 - p_3) +$$
$$+(1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot p_3 + (1 - p_1) \cdot p_2 \cdot (1 - p_3) + p_1 \cdot (1 - p_2) \cdot (1 - p_3) =$$
$$= (p_1 + p_2 + p_3) - (p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_3) + (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3) \tag{3}$$

Заметим, что в результате преобразований функция ВБР приобретает вид суммы групп многочленов степеней начиная от k до N. Для упрощения аналитической записи функции ВБР перепишем выражения (1)-(3) в виде (4)-(6) соответственно:

$$P_s(p_1, p_2, p_3) = 1 \cdot |123| \tag{4}$$

$$P_s(p_1, p_2, p_3) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 12 \\ 13 \\ 23 \end{vmatrix} - 2 \cdot |123| \tag{5}$$

$$P_s(p_1, p_2, p_3) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 12 \\ 13 \\ 23 \end{vmatrix} + 1 \cdot |123| \tag{6}$$

По аналогии, результаты для систем из 4 и 5 элементов будут иметь вид:

$N = 4$, $k = 4$:

$$P_s(p_1, p_2, p_3, p_4) = 1 \cdot |1234|$$

$N = 4$, $k = 3$:

$$P_s(p_1, p_2, p_3, p_4) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 123 \\ 124 \\ 134 \\ 234 \end{vmatrix} - 3 \cdot |1234|$$

$N = 4$, $k = 2$:

$$P_s(p_1, p_2, p_3, p_4) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 23 \\ 13 & 24 \\ 14 & 34 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 123 \\ 124 \\ 134 \\ 234 \end{vmatrix} + 3 \cdot |1234|$$

$N = 4$, $k = 1$:

$$P_s(p_1, p_2, p_3, p_4) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 23 \\ 13 & 24 \\ 14 & 34 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 123 \\ 124 \\ 134 \\ 234 \end{vmatrix} - 1 \cdot |1234|$$

$N = 5$, $k = 5$:

$$P_s(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = 1 \cdot |12345|$$

$N = 5$, $k = 4$:

$$P_s(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1234 \\ 1235 \\ 1245 \\ 1345 \\ 2345 \end{vmatrix} - 4 \cdot |12345|$$

$N = 5$, $k = 3$:

$$P_s(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 123 & 145 \\ 124 & 234 \\ 125 & 235 \\ 134 & 245 \\ 135 & 345 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1234 \\ 1235 \\ 1245 \\ 1345 \\ 2345 \end{vmatrix} + 6 \cdot |12345|$$

$N = 5$, $k = 2$:

$$P_s(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 24 \\ 13 & 25 \\ 14 & 34 \\ 15 & 35 \\ 23 & 45 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 123 & 145 \\ 124 & 234 \\ 125 & 235 \\ 134 & 245 \\ 135 & 345 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1234 \\ 1235 \\ 1245 \\ 1345 \\ 2345 \end{vmatrix} - 4 \cdot |12345| \qquad (7)$$

$N = 5$, $k = 1$:

$$P_s(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 24 \\ 13 & 25 \\ 14 & 34 \\ 15 & 35 \\ 23 & 45 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 123 & 145 \\ 124 & 234 \\ 125 & 235 \\ 134 & 245 \\ 135 & 345 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1234 \\ 1235 \\ 1245 \\ 1345 \\ 2345 \end{vmatrix} + 1 \cdot |12345|$$

Каждая группа многочленов имеет свой внешний числовой коэффициент (A_i). Например, для $N = 5$, $k = 2$ коэффициенты равны:

$$A_1 = 1, \qquad A_2 = -2, \qquad A_3 = 3, \qquad A_3 = -4$$

Для наглядности сведем коэффициенты A_i в таблицу:

Таблица 1. Внешние коэффициенты для различных систем резервирования

		Минимально необходимое количество элементов (k)							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Число элементов в системе (N)	1	1.							
	2	1; -1.	1.						
	3	1; -1; 1.	1; -2.	1.					
	4	1; -1; 1; -1.	1; -2; 3.	1; -3.	1.				
	5	1; -1; 1; -1; 1.	1; -2; 3; -4.	1; -3; 6.	1; -4.	1.			
	6	1; -1; 1; -1; 1; -1.	1; -2; 3; -4; 5.	1; -3; 6; -10.	1; -4; 10.	1; -5.	1.		
	7	1; -1; 1; -1; 1; -1; 1.	1; -2; 3; -4; 5; -6.	1; -3; 6; -10; 15.	1; -4; 10; -20.	1; -5; 15.	1; -6.	1.	
	8	1; -1; 1; -1; 1; -1; 1; -1.	1; -2; 3; -4; 5;-6; 7.	1; -3; 6; -10; 15; -21.	1; -4; 10; -20; 35.	1; -5; 15; -35.	1; -6; 21.	1; -7.	1.

Анализ данных табл. 1 выявил следующие закономерности в зависимостях значений внешних коэффициентов (A_i) от состава резервированных систем, характеризуемых величинами N и k:

- знаки подряд идущих коэффициентов чередуются;
- модули коэффициентов находятся согласно зависимости, показанной на рис. 2:

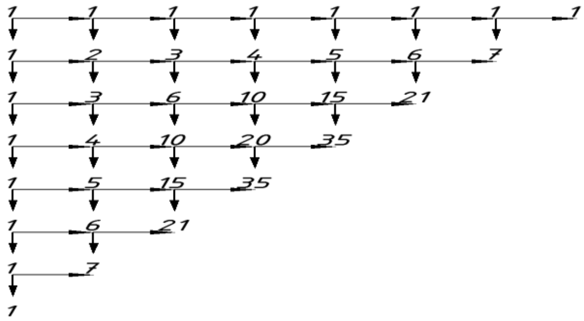

Рис. 2. Графическая иллюстрация алгоритма образования коэффициентов A_i

Количество единиц на первой строке соответствует количеству элементов (N), а количество строк – выражению $(N-k+1)$. Элемент на каждой следующей строке является суммой элементов на строке выше. Например:

$$3 = 1+1+1 = 1+2$$
$$6 = 1+1+1+1+1+1 = 1+2+3 = 1+5$$
$$15 = 1+2+3+4+5 = 1+4+10$$
$$20 = 1+3+6+10$$

Недостатком такого алгоритма является отсутствие учета возможности повторения элементов резервированной системы. Например, для системы из 5 элементов существует 7 вариантов ее построения: все элементы разные (1-1-1-1-1); два элемента повторяются (2-1-1-1); по два элемента повторяются (2-2-1); три элемента повторяются (3-1-1); три и два элемента повторяются (3-2); четыре элемента повторяются и один отличный (4-1); все элементы одинаковые (5). При включении в систему одинаковых элементов внутри групп многочленов, например, в (7):

$$\ldots - 2 \cdot \begin{vmatrix} 123 & 145 \\ 124 & 234 \\ 125 & 235 \\ 134 & 245 \\ 135 & 345 \end{vmatrix} + \cdots$$

могут возникать одинаковые слагаемые. В результате степени многочленов и значения коэффициентов A_i не изменятся, но возможно упрощение аналитического представления самих групп многочленов. Например, методом математической индукции рассмотрим систему из трех элементов с учетом возможных повторений элементов.

Для $N=3$, $k=3$, элементы не повторяются, функция ВБР системы имеет вид:

$$P_s(p_1, p_2, p_3) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \tag{8}$$

Для $N=3$, $k=2$, элементы не повторяются, функция ВБР системы имеет вид:

$$\begin{gathered} P_s(p_1, p_2, p_3) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 + \\ +(1-p_1) \cdot p_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot (1-p_2) \cdot p_3 + p_1 \cdot p_2 \cdot (1-p_3) = \\ = (p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_3) - 2 \cdot (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3) \end{gathered} \tag{9}$$

Для $N=3$, $k=1$, элементы не повторяются, функция ВБР системы имеет вид:

$$\begin{gathered} P_s(p_1, p_2, p_3) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 + \\ +(1-p_1) \cdot p_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot (1-p_2) \cdot p_3 + p_1 \cdot p_2 \cdot (1-p_3) + \\ +(1-p_1) \cdot (1-p_2) \cdot p_3 + (1-p_1) \cdot p_2 \cdot (1-p_3) + p_1 \cdot (1-p_2) \cdot (1-p_3) = \\ = (p_1 + p_2 + p_3) - (p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_3) + (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3) \end{gathered} \tag{10}$$

Для $N=3$, $k=3$, два элемента повторяются, функция ВБР системы имеет вид:

$$P_s(p_1, p_2, p_3) = {p_1}^2 \cdot p_2 \tag{11}$$

Для $N = 3$, $k = 2$, два элемента повторяются, функция ВБР системы имеет вид:

$$P_s(p_1, p_2, p_3) = {p_1}^2 \cdot p_2 +$$
$$+2 \cdot (1 - p_1) \cdot p_1 \cdot p_2 + {p_1}^2 \cdot (1 - p_2) =$$
$$= ({p_1}^2 + 2 \cdot p_1 \cdot p_2) - 2 \cdot ({p_1}^2 \cdot p_2) \qquad (12)$$

Для $N = 3$, $k = 1$, элементы не повторяются, функция ВБР системы имеет вид:

$$P_s(p_1, p_2, p_3) = {p_1}^2 \cdot p_2 +$$
$$+2 \cdot (1 - p_1) \cdot p_1 \cdot p_2 + {p_1}^2 \cdot (1 - p_2) +$$
$$+(1 - p_1)^2 \cdot p_2 + 2 \cdot (1 - p_1) \cdot p_1 \cdot (1 - p_2) =$$
$$= (2 \cdot p_1 + p_2) - ({p_1}^2 + 2 \cdot p_1 \cdot p_2) + ({p_1}^2 \cdot p_2) \qquad (13)$$

Для $N = 3$, $k = 3$, все элементы одинаковы, функция ВБР системы имеет вид:

$$P_s(p_1, p_2, p_3) = {p_1}^3 \qquad (14)$$

Для $N = 3$, $k = 2$, все элементы одинаковы, функция ВБР системы имеет вид:

$$P_s(p_1, p_2, p_3) = {p_1}^3 +$$
$$+3 \cdot (1 - p_1) \cdot {p_1}^2 =$$
$$= (3 \cdot {p_1}^2) - 2 \cdot ({p_1}^3) \qquad (15)$$

Для $N = 3$, $k = 1$, все элементы одинаковы, функция ВБР системы имеет вид:

$$P_s(p_1, p_2, p_3) = {p_1}^3 +$$
$$+3 \cdot (1 - p_1) \cdot {p_1}^2 +$$
$$+3 \cdot (1 - p_1)^2 \cdot p_1 =$$
$$= (3 \cdot p_1) - (3 \cdot {p_1}^2) + ({p_1}^3) \qquad (16)$$

Для упрощения аналитической записи функции ВБР перепишем выражения (8)-(16) в виде (17)-(25) соответственно:

$$P_s(p_1, p_2, p_3) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 123 \end{vmatrix} \qquad (17)$$

$$P_s(p_1, p_2, p_3) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 13 \\ 1 & 23 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 123 \end{vmatrix} \qquad (18)$$

$$P_s(p_1, p_2, p_3) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 13 \\ 1 & 23 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 123 \end{vmatrix} \qquad (19)$$

$$P_s(p_1, p_2, p_3) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 112 \end{vmatrix} \qquad (20)$$

$$P_s(p_1, p_2, p_3) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 112 \end{vmatrix} \qquad (21)$$

$$P_s(p_1, p_2, p_3) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 112 \end{vmatrix} \qquad (22)$$

$$P_s(p_1, p_2, p_3) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 111 \end{vmatrix} \qquad (23)$$

$$P_s(p_1, p_2, p_3) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 11 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 111 \end{vmatrix} \qquad (24)$$

$$P_s(p_1, p_2, p_3) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 11 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 111 \end{vmatrix} \qquad (25)$$

Проведенное рассмотрение показало, что наряду с внешними, относительно групп, коэффициентами (A_i) можно выделить коэффициенты (B_{ij}), внутренние для каждой из групп. Например, в (22) внешние коэффициенты (A_i):

$$A_1 = 1, \qquad A_2 = -1, \qquad A_3 = 1$$

внутренние коэффициенты (B_{ij}):

$$B_{11} = 2, \qquad B_{12} = 1, \qquad B_{21} = 1, \qquad B_{22} = 2, \qquad B_{31} = 1$$

Для выведения общего алгоритма получения внутренних коэффициентов рассмотрим систему из 5-ти элементов для всех вариантов повторения ее резервируемых элементов. Теперь общую картину результатов можно сформировать в упрощенном виде.

Система из 5 различных элементов (1-1-1-1-1) дает результаты:

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 12345\end{vmatrix}$$

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1234\\1 & 1235\\1 & 1245\\1 & 1345\\1 & 2345\end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix}1 & 12345\end{vmatrix}$$

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 123 & 1 & 145\\1 & 124 & 1 & 234\\1 & 125 & 1 & 235\\1 & 134 & 1 & 245\\1 & 135 & 1 & 345\end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix}1 & 1234\\1 & 1235\\1 & 1245\\1 & 1345\\1 & 2345\end{vmatrix} + 6\cdot\begin{vmatrix}1 & 12345\end{vmatrix}$$

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 12 & 1 & 24\\1 & 13 & 1 & 25\\1 & 14 & 1 & 34\\1 & 15 & 1 & 35\\1 & 23 & 1 & 45\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}1 & 123 & 1 & 145\\1 & 124 & 1 & 234\\1 & 125 & 1 & 235\\1 & 134 & 1 & 245\\1 & 135 & 1 & 345\end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix}1 & 1234\\1 & 1235\\1 & 1245\\1 & 1345\\1 & 2345\end{vmatrix} -$$
$$-4\cdot\begin{vmatrix}1 & 12345\end{vmatrix}$$

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\\1 & 3\\1 & 4\\1 & 5\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 12 & 1 & 24\\1 & 13 & 1 & 25\\1 & 14 & 1 & 34\\1 & 15 & 1 & 35\\1 & 23 & 1 & 45\end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 123 & 1 & 145\\1 & 124 & 1 & 234\\1 & 125 & 1 & 235\\1 & 134 & 1 & 245\\1 & 135 & 1 & 345\end{vmatrix} -$$
$$-1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1234\\1 & 1235\\1 & 1245\\1 & 1345\\1 & 2345\end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 12345\end{vmatrix}$$

Система вида (2-1-1-1):

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 11234\end{vmatrix}$$

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1123\\1 & 1124\\1 & 1134\\2 & 1234\end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix}1 & 11234\end{vmatrix}$$

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}\begin{matrix}1 & 112\\1 & 113\\1 & 114\\2 & 123\end{matrix} & \begin{matrix}2 & 124\\2 & 134\\1 & 234\end{matrix}\end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix}1 & 1123\\1 & 1124\\1 & 1134\\2 & 1234\end{vmatrix} + 6\cdot\begin{vmatrix}1 & 11234\end{vmatrix}$$

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}\begin{matrix}1 & 11\\2 & 12\\2 & 13\\2 & 14\end{matrix} & \begin{matrix}1 & 23\\1 & 24\\1 & 34\end{matrix}\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}\begin{matrix}1 & 112\\1 & 113\\1 & 114\\2 & 123\end{matrix} & \begin{matrix}2 & 124\\2 & 134\\1 & 234\end{matrix}\end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix}1 & 1123\\1 & 1124\\1 & 1134\\2 & 1234\end{vmatrix} -$$
$$-4\cdot\begin{vmatrix}1 & 11234\end{vmatrix}$$

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 2\\1 & 3\\1 & 4\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}\begin{matrix}1 & 11\\2 & 12\\2 & 13\\2 & 14\end{matrix} & \begin{matrix}1 & 23\\1 & 24\\1 & 34\end{matrix}\end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix}\begin{matrix}1 & 112\\1 & 113\\1 & 114\\2 & 123\end{matrix} & \begin{matrix}2 & 124\\2 & 134\\1 & 234\end{matrix}\end{vmatrix} -$$
$$-1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1123\\1 & 1124\\1 & 1134\\2 & 1234\end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 11234\end{vmatrix}$$

Система вида (2-2-1):

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 11223\end{vmatrix}$$

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1122\\2 & 1123\\2 & 1223\end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix}1 & 11223\end{vmatrix}$$

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}2 & 112\\1 & 113\\2 & 122\\4 & 123\\1 & 223\end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix}1 & 1122\\2 & 1123\\2 & 1223\end{vmatrix} + 6\cdot\begin{vmatrix}1 & 11223\end{vmatrix}$$

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 11\\4 & 12\\2 & 13\\1 & 22\\2 & 23\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}2 & 112\\1 & 113\\2 & 122\\4 & 123\\1 & 223\end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix}1 & 1122\\2 & 1123\\2 & 1223\end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix}1 & 11223\end{vmatrix}$$

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\2 & 2\\1 & 3\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 11\\4 & 12\\2 & 13\\1 & 22\\2 & 23\end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix}2 & 112\\1 & 113\\2 & 122\\4 & 123\\1 & 223\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1122\\2 & 1123\\2 & 1223\end{vmatrix} +$$

$$+1\cdot\begin{vmatrix}1 & 11223\end{vmatrix}$$

Система вида (3-1-1):

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 11123\end{vmatrix}$$

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1112\\1 & 1113\\3 & 1123\end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix}1 & 11123\end{vmatrix}$$

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 111\\3 & 112\\3 & 113\\3 & 123\end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix}1 & 1112\\1 & 1113\\3 & 1123\end{vmatrix} + 6\cdot\begin{vmatrix}1 & 11123\end{vmatrix}$$

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}3 & 11\\3 & 12\\3 & 13\\1 & 23\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}1 & 111\\3 & 112\\3 & 113\\3 & 123\end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix}1 & 1112\\1 & 1113\\3 & 1123\end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix}1 & 11123\end{vmatrix}$$

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\1 & 2\\1 & 3\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}3 & 11\\3 & 12\\3 & 13\\1 & 23\end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 111\\3 & 112\\3 & 113\\3 & 123\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1112\\1 & 1113\\3 & 1123\end{vmatrix} +$$

$$+1\cdot\begin{vmatrix}1 & 11123\end{vmatrix}$$

Система вида (3-2):

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 11122\end{vmatrix}$$

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}2 & 1112\\3 & 1122\end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix}1 & 11122\end{vmatrix}$$

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 111\\6 & 112\\3 & 122\end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix}2 & 1112\\3 & 1122\end{vmatrix} + 6\cdot\begin{vmatrix}1 & 11122\end{vmatrix}$$

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}3 & 11\\6 & 12\\1 & 22\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}1 & 111\\6 & 112\\3 & 122\end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix}2 & 1112\\3 & 1122\end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix}1 & 11122\end{vmatrix}$$

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\2 & 2\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}3 & 11\\6 & 12\\1 & 22\end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 111\\6 & 112\\3 & 122\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}2 & 1112\\3 & 1122\end{vmatrix} +$$

$$+1\cdot\begin{vmatrix}1 & 11122\end{vmatrix}$$

Система вида (4-1):

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 11112\end{vmatrix}$$

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1111\\4 & 1112\end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix}1 & 11112\end{vmatrix}$$

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}4 & 111\\6 & 112\end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix}1 & 1111\\4 & 1112\end{vmatrix} + 6\cdot\begin{vmatrix}1 & 11112\end{vmatrix}$$

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}6 & 11\\4 & 12\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}4 & 111\\6 & 112\end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix}1 & 1111\\4 & 1112\end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix}1 & 11112\end{vmatrix}$$

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 1\cdot\begin{vmatrix}4 & 1\\1 & 2\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}6 & 11\\4 & 12\end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix}4 & 111\\6 & 112\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1111\\4 & 1112\end{vmatrix} + \\ +1\cdot\begin{vmatrix}1 & 11112\end{vmatrix}$$

Система вида (5) после преобразований сводится к классической формуле расчета ВБР:

$$P_s(t) = \sum_{i=m}^{n}\left(\frac{n!}{i!\cdot(n-i)!}\cdot {p_1}^i\cdot(1-p_1)^{n-i}\right)$$

$$P_s(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5) = 5\cdot p_1 - 10\cdot {p_1}^2 + 10\cdot {p_1}^3 - 5\cdot {p_1}^4 + 1\cdot {p_1}^5$$

Анализ полученных результатов позволяет сформировать алгоритм формирования «младших» коэффициентов, т.е. внутри группы слагаемых. Рассмотрим группу слагаемых для системы (3-2), которая состоит из трех элементов типа «1» и двух элементов типа «2».

Коэффициенты 1, 6 и 3 образуются следующим образом: введем функциональную матрицу, где первая строчка характеризует номер элемента, вторая – общее количество подобных элементов, а третье – число выбранных элементов:

$$\begin{vmatrix}1 & 111\\6 & 112\\3 & 122\end{vmatrix}$$

Первое слагаемое 111 (первая строка матрицы) означает, что из 3-х «1» и 2-х «2» выбраны все «1». В матричном представлении:

$$\begin{array}{r}\text{Тип элементов}\\ \text{Общее количество}\\ \text{Число выбранных}\end{array}\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 2\\3 & 0\end{vmatrix}$$

«Младший» коэффициент вычисляется как произведение чисел сочетаний для каждых типов элементов из их общего количества.

$$\underset{\text{Для элемента типа "1"}}{\frac{3!}{3!\cdot(3-3)!} = 1} \quad * \quad \underset{\text{Для элемента типа "2"}}{\frac{2!}{0!\cdot(2-0)!} = 1} \quad = 1$$

Второе слагаемое 112 (вторая строка матрицы) означает, что из 3-х «1» и 2-х «2» выбраны две «1» и одна «2». В матричном представлении:

$$\begin{array}{r}\text{Тип элементов}\\ \text{Общее количество}\\ \text{Число выбранных}\end{array}\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 2\\2 & 1\end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{Для элемента типа "1"}}{\frac{3!}{2!\cdot(3-2)!} = 3} \quad * \quad \underset{\text{Для элемента типа "2"}}{\frac{2!}{1!\cdot(2-1)!} = 2} \quad = 6$$

Третье слагаемое 122 (третья строка матрицы) означает, что из 3-х «1» и 2-х «2» выбраны одна «1» и все «2». В матричном представлении:

$$\begin{array}{r}\text{Тип элементов}\\ \text{Общее количество}\\ \text{Число выбранных}\end{array}\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 2\\1 & 2\end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{Для элемента типа "1"}}{\frac{3!}{1!\cdot(3-1)!} = 3} \quad * \quad \underset{\text{Для элемента типа "2"}}{\frac{2!}{2!\cdot(2-2)!} = 1} \quad = 3$$

Отметим, что алгоритм формирования слагаемых внутри групп представляет собой булевский счет с тем отличием, что он ведется не до 1 в текущем разряде, а до некоторого максимального значения. Разряд соответствует типу элемента, а максимальное значение для этого разряда, – количеству элементов данного типа в исходной системе.

Заключение

Предложенные аналитические выражения, определяющие алгоритмы расчета вероятности безотказной работы крупномасштабной системы при минимально необходимом числе разнородных элементов, являются универсальными инструментами, определяющими возможность введения автоматизации управления в системы с произвольным множеством элементов и произвольным подмножеством элементов нагруженного резерва [9].

Применение разработанного алгоритма показало возможность обеспечения эффективности управления группировкой летательных аппаратов как крупномасштабной системой, выполняющей большой комплекс задач. Компьютерная реализация такого алгоритма позволяет сократить время разработки систем управления, повышая эффективность выполнения полетных заданий. При отсутствии сложных преобразований внутри алгоритма полученная аналитическая зависимость обуславливает требуемую заказчиком точность и быстроту решений прикладных задач.

В авиационной промышленности, где физические макеты имеют высокую стоимость, а время разработки велико, возможность использования предлагаемого алгоритма является особенно ценной.

Литература

1. *Kim, B, Kim, J.* Analysis of the Waiting Time Distribution for Polling Systems with Retrials and Glue Periods // Annals of Operation Research. - 2019. Vol.227, no.2.- P.197-212.
2. *Matveev, A.*, Feoktistova, K., On Global Near Optimality of Special Periodic Protocols for Field Polling Systems with Setups // Journal of Optimization Theory and Applications/-2016.- Vol.171, no.2. – P.223-241.
3. *Zeng, P., Li, H., He, H., Li, S* Dynamic energy management of a microgrid using approximate dynamic programming and deep recurrent neural network learning // IEEE Transactions on Smart Grid. – Vol. 10, iss. 4.- P.4435-4445.
4. *Erikstad, S.* Design patterns for digital Twin Solutions in marine systems design and Operations // In Proc. 17th International Conference on Computer and IT Applications in the Maritime Industries COMPIT18. Hamburg, Technische Universitdt Hamburg, 2018.- P.354-363.
5. *Кривопалов Д.М., Юркевич Е.В., Крюкова Л.Н.* Интеллектуальная система приобретения знаний для оценки надежности сложных программно-технических средств //Труды Международного симпозиума Надежность и качество, Пенза, 2020.- С. 134-136.
6. *Zorine, A.V.* On Ergodicity Conditions in a Polling Model with Markov Modulated Input and State-Dependent Routing // Queueing Systems. - 2014.-Vol.76, no.2 – P 223-241.
7. *Романчева Н.И.* Обратная задача оценки качества элементов сложных систем //Труды XXIII Международного симпозиума Надежность и качество, Пенза, 2018, том 1. - С.71-75.
8. *Borst, S.C., Boxma, O.* Polling: Past, Present, and Perspective // TOP. 2018/ - Vol. 16, no.2.- P. 335-369.
9. *Кулиш Н.С., Тюрина Д.Д.; Бабишин В.Д., Гайдай Т.Я., Скоробогатов П.О., Кривопалов Д.М. Бурба А.А., Юркевич Е.В.* «Устройство формирования оптимальных управляющих воздействий для обеспечения устойчивой работы сложных технических систем» /Патент на изобретение № 2674281. Государственная регистрация от 06.12.2018.