УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ ПРИ ПОСТОЯННОМ СПРОСЕ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ СКЛАДОВ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ВМЕСТИМОСТЬ СКЛАДОВ

Хоботов Е.Н.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, г. Москва, Профсоюзная ул., 65

e_khobotov@mail.ru,

Аверьянова Е.Е.

ООО «Фирма Резерв-Инвест»

Россия, г. Москва, Малый Златоустинский переулок, дом 6, стр.1

ail19@yandex.ru

Аннотация: Рассматриваются задачи управления запасами в условиях ограниченной вместимости складов, а также задачи управления многопродуктовыми запасами в иерархических системах складов с ограничениями на вместимость складов при постоянном спросе. Для решения этих задач предлагаются модели и методы, позволяющие в соответствии с имеющимся спросом и ограничениями на вместимость складов определять время и объёмы пополнения всех складов, находящихся на различных уровнях такой системы складов.

Ключевые слова: склад, хранение запасов, иерархическая система складов, многопродуктовые запасы, пополнение запасов, спрос на продукцию, методы управления запасами

1 Введение

В последние годы повышенный интерес проявляется к изучению задач управления логистическими системами и созданию методов их решения. Такой интерес обусловлен тем, что с одной стороны эти системы широко используются в промышленном производстве, а также для снабжения населения различной продукцией. С другой стороны, использование методов управления запасами, которые достаточно хорошо развиты для управления запасами на отдельных складах [1-4], позволяют экономить в процессе управления запасами весьма заметные средства.

Среди задач управления логистическими системами особое место занимают задачи управления многопродуктовыми запасами в иерархических системах складов. Такие системы складов в настоящее время используются при снабжении регионов продукцией, продовольствием, лекарствами, запасными частями, особенно автомобильными, и т.д. В иерархических системах складов, обычно, хранятся значительные запасы продукции, и осуществляется их большой оборот. Однако методы и модели для управления запасами в таких системах развиты недостаточно.

Высокая эффективность, получаемая от использования методов управления запасами, даёт основание полагать, что создание моделей и методов для управления пополнением и хранением запасов в иерархических системах складов позволит значительно сократить расходы на работу складов.

Кроме того, следует отметить, что созданию моделей и методов управления запасами, особенно многопродуктовыми, когда имеются ограничения на объёмы складов, уделяется недостаточное внимание, хотя в основном именно такие задачи управления запасами и встречаются в реальных условиях.

В данной работе рассматриваются задачи управления многопродуктовыми запасами с ограничениями на величину хранящихся запасов. Эти задачи рассматриваются в условиях, когда спрос на хранимую продукцию является постоянным. Для их решения предлагаются модели и методы, позволяющие в соответствии с имеющимся спросом на продукцию и ограничениями на вместимость складов определять время и объёмы пополнения запасов. Для иерархических систем складов предлагаемые модели и методы позволяют определять указанные параметры управления для всех складов, находящихся на различных уровнях такой системы складов.

2 Постановки задач

Рассмотрим задачу управления многопродуктовыми запасами в иерархической системе складов в условиях постоянного спроса и при наличии ограничений на количество хранящейся продукции на каждом складе системы.

Пусть задана иерархическая система складов, которую удобно представить в виде ориентированного ациклического графа. В корневой вершине такого графа находится склад первого уровня, который снабжается продукцией напрямую от производителей. На этом складе хранятся все виды продукции, которые реализуются в системе складов, и все остальные склады системы получают продукцию, доставленную сначала на данный склад. На втором уровне системы складов имеется K_2 складов. На s-м уровне системы находится K_s складов и на последнем N-м уровне системы складов находится K_N складов.

Каждый склад следующего уровня снабжается только с одного склада предыдущего уровня. Для каждого снабжаемого склада системы известен снабжающий его склад. Назначение снабжающего склада может производиться как по стоимости доставки продукции между складами, так и по составу поставляемой продукции.

На каждом уровне этой системы кроме первого имеются склады, с которых не производится снабжение складов следующего уровня. Обозначим множество таких складов на s-м уровне системы складов через G_s. Снабжающие склады s-го уровня системы не принадлежат этому множеству, т.е. v-й снабжающий склад с s-го уровня $v \notin G_s$.

Со снабжающих складов каждого уровня производится снабжение клиентов склада и складов следующего уровня. Продукция, приобретённая клиентами склада, на другие склады системы уже не поступает. Для каждого склада i ($i \in K_s$), находящегося на s-м ($s = 1, \ldots, N$) уровне системы складов задана стоимость хранения на нём C_{il}^{s} единицы продукции l-го типа ($l \in J_{is}$) в единицу времени, где J_{is} – множество типов продукции, которая хранится на i-м складе s-го уровня. Задано также максимальное количество мест Q_{is}, на которых могут храниться запасы продукции этого склада. Не нарушая общности, будем считать, что на каждом месте склада может храниться единица поступающей продукции любого типа.

Кроме того, заданы стоимости доставки продукции $\tilde{C}_{is}$ на i-й склад s-го уровня, которые не зависят от величины пополнения. В задачах управления запасами [1-5] такое предположение достаточно часто используется.

Пусть спрос в единицу времени на хранящуюся продукцию на любом складе i ($i \in K_s$), находящемся на s-м уровне ($s = 1, \ldots, N$) такой системы складов будет постоянным. При этих условиях для данной системы складов удаётся предложить методы управления запасами, которые позволят обеспечить бездефицитную работу складов.

В связи с этим в задаче с постоянным спросом на продукцию каждого типа требуется для каждого склада i ($i \in K_s$), находящегося на s-м уровне этой системы складов ($s = 1, \ldots, N$) определить интервалы времени t_{is} между смежными пополнениями запасов, а также величину каждого пополнения запасов. Эти величины требуется определить таким образом, чтобы ни на одном из складов в иерархической системе складов не возникал дефицит продукции.

3 Принципы построения моделей и методов управления запасами при наличии ограничений на объёмы складов.

Рассмотрим принципы построения моделей для определения параметров управления на примере простейшей задачи управления запасами продукции одного типа при постоянном спросе и наличии ограничения на максимальное количество хранящейся продукции.

Эта задача может быть сформулирована следующим образом. Пусть имеется склад, на котором количество мест для хранения запасов ограничено некоторой величиной Q. На складе хранится продукция одного типа, спрос r на которую в единицу времени является постоянным. Известны стоимость хранения единицы продукции в единицу времени C и стоимость доставки на склад пополнения запасов $\tilde{C}$, которая не зависит от величины пополнения.

В задаче требуется определить время между смежными пополнениями запасов и величину этих пополнений так, чтобы затраты на хранение и пополнение запасов были бы минимальными.

Эта задача отличается от задачи, для которой Вильсон и Харрисон [1,3] получили соотношения, позволяющие определять оптимальные величины пополнения запасов и времена между смежными пополнениями запасов, наличием следующего ограничения:

$$0 \le rt \le Q \tag{1}$$

на максимальное количество хранящейся продукции Q.

Затраты D на хранение и пополнение запасов в течение планируемого интервала времени T в этом случае согласно [1] можно записать следующим образом:

$$D = \left(\frac{Crt^2}{2} + \tilde{C}\right) n = \left(\frac{Crt^2}{2} + \tilde{C}\right) \frac{T}{t} = \frac{CrtT}{2} + \frac{\tilde{C}T}{t}.$$

Графически функцию затрат $D(t)$ можно представить в виде, как показано на рис. 1. Эта функция является строго выпуклой и непрерывно дифференцируемой функцией t. На область изменения t наложено ограничение (1).

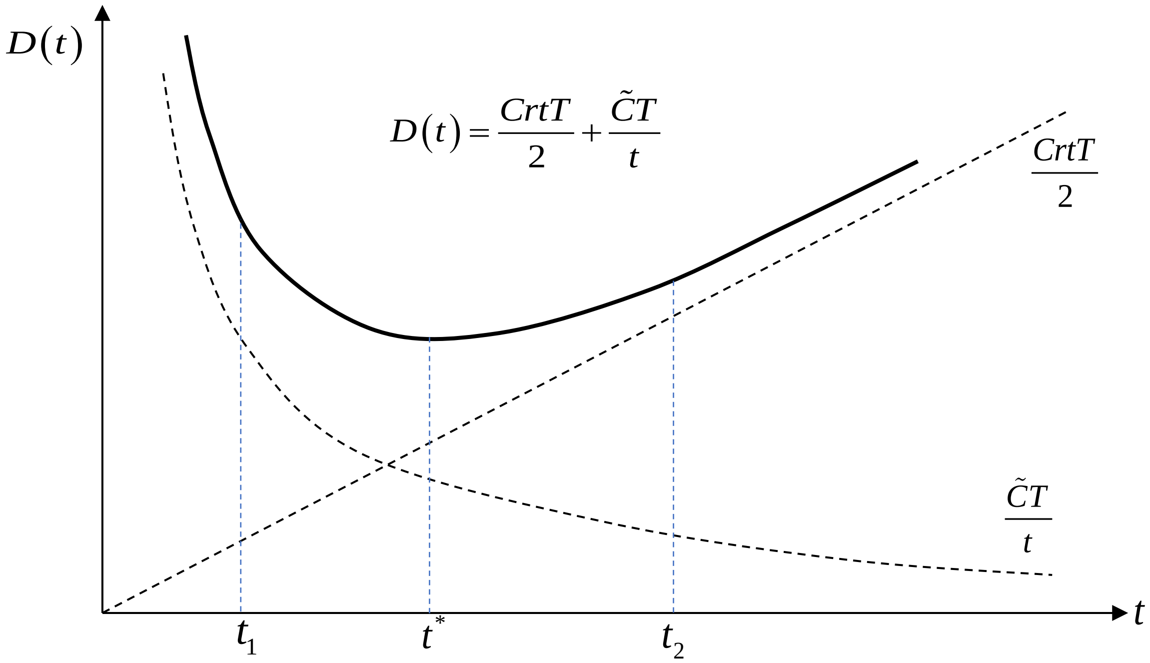

Рис. 1. Функция затрат $D(t)$ на хранение и пополнение запасов.

В общем случае задача минимизации функции $D(t)$ при наличии ограничения (1) является задачей выпуклого программирования. Однако, учитывая специфику этой задачи, для её решения может быть использован гораздо более простой алгоритм.

Как видно из рисунка 1, в силу строгой выпуклости и непрерывности функции $D(t)$ точка её безусловного минимума t^* будет решением этой задачи, если ограничение (1) будет выполнено при $t = t^*$, т.е. $rt^* \le Q = rt_2$ и при $t^* \le t_2$. Если окажется, что $rt^* > Q = rt_1$, т.е. при $t^* > t_1$ ограничение (1) будет нарушено, то в силу строгой выпуклости и непрерывности функции $D(t)$ минимальное значение этой функции будет достигаться в точке t_1, в которой выполняется ограничение (1).

Поэтому решение задачи минимизации функции $D(t)$ при наличии ограничения (1) $\breve{t}$ можно записать в следующем виде:

$$\breve{t} = \min\{t^*, t_1\},$$

где t_1 определяется из условия $t_1 = \dfrac{Q}{r}$.

Рассмотрим задачу управления многопродуктовыми запасами продукции при постоянном спросе и наличии ограничения на количество хранящейся продукции.

Пусть имеется склад, на котором количество мест для хранения запасов ограничено некоторой величиной Q. На складе хранится продукция L типов, спрос r_i $(i = 1, \ldots, L)$ на которую в единицу времени является постоянным. Известны стоимость хранения единицы продукции i-го типа $(i = 1, \ldots, L)$ в единицу времени C_i и стоимость доставки на склад пополнения запасов $\tilde{C}$, которая не зависит от величины пополнения. Не нарушая общности, будем считать, что все типы продукции могут размещаться в любых ячейках склада.

В задаче требуется определить время между смежными пополнениями запасов и величину этих пополнений так, чтобы затраты на хранение и пополнение запасов при ограничении вместимости склада, были бы минимальными.

В [3] для управления многопродуктовыми запасами предлагалось одновременно производить пополнение запасов на складе продукцией различных типов. В этом случае затраты $\tilde{D}(t)$ на хранение и пополнение запасов в течение планируемого интервала времени T при постоянном спросе в соответствии с [3] можно записать в следующем виде:

$$\tilde{D}(t) = \left(\sum_{i=1}^{L} \frac{C_i r_i t^2}{2} + \tilde{C} \right) n = \left(\sum_{i=1}^{L} \frac{C_i r_i t^2}{2} + \tilde{C} \right) \frac{T}{t} = \sum_{i=1}^{L} \frac{C_i r_i t T}{2} + \frac{\tilde{C} T}{t}.$$

Ограничения на количество хранящейся на складе продукции имеют следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{L} q_i \le Q \tag{2}$$

где q_i – величина пополнения запасов продукции i-го типа $(i = 1, \ldots, L)$.

Это ограничение в условиях постоянного спроса и одновременного пополнения запасов хранящей продукции с интервалом времени t между смежными пополнениями запасов можно записать в виде:

$$\sum_{i=1}^{L} r_i t \le Q \text{ или } t \le \frac{Q}{\sum_{i=1}^{L} r_i}$$

Функция $\tilde{D}(t)$ в этом случае также является строго выпуклой и непрерывно дифференцируемой функцией t. Поэтому, как и в предыдущем случае, решение $\breve{t}$ задачи минимизации функции $\tilde{D}(t)$ при наличии ограничения (2) можно записать в следующем виде:

$$\breve{t} = \min\{t^*, t_1\},$$

где величина t_1 определяется из условия $t_1 = \dfrac{Q}{\sum_{i=1}^{L} r_i}$, а величина t^* вычисляется согласно [3] из условия минимума функции $\tilde{D}(t)$ без учёта ограничения на вместимость склада с помощью соотношения:

$$t^* = \sqrt{\frac{2\tilde{C}}{\sum_{i=1}^{L} C_i r_i}}.$$

В этом случае величины пополнений запасов $\breve{q}_i$, при которых не будут нарушаться ограничения (2), и функция $\tilde{D}(t)$ при выполнении этих ограничений будет достигать минимума, определяются следующим образом:

$$\breve{q}_i = r_i \breve{t}, \; i = 1,...,L.$$

4 Принципы построения методов управления запасами в иерархических системах складов

Рассмотрим идеи и принципы построения модели управления запасами для иерархической системы складов, когда спрос на продукцию, хранящуюся на каждом складе и реализуемую с него, постоянный, а пополнение запасами следует организовать так, чтобы не допустить дефицита продукции на каждом складе и превышения вместимости склада.

Планирование работ по снабжению складов и управление запасами в иерархической системе складов оказываются значительно более сложной проблемой, чем снабжение продукцией и управление запасами на отдельных складах. Это связано с тем, что при планировании пополнения запасов на некотором складе в иерархической системе складов необходимо рассчитывать пополнения для всех складов, через которые происходит пополнение данного склада.

Основные идеи и принципы вывода соотношений для определения параметров управления запасами в иерархической системе складов с ограничениями на их вместимость удобно рассмотреть на примере самой простой схемы такой системы, состоящей из двух складов, на которых хранится продукция одного типа. Один из таких складов является снабжающим складом, а другой снабжаемым.

Под снабжающим складом будем понимать склад, из запасов которого будет пополняться продукцией снабжаемый склад. В связи с этим будем считать, что параметры складов позволяют хранить на снабжаемом складе такое количество продукции, которой будет достаточно кроме обеспечения своих потребностей также хотя бы для второго пополнения запасов на снабжающем складе. Первое пополнение снабжающего склада производится в момент пополнения снабжаемого склада, и продукция этого пополнения на снабжаемом складе не хранится.

Пусть для такой системы складов известны стоимости хранения продукции единицы продукции в единицу времени C_1 и постоянный спрос на неё r_1 в единицу времени клиентов склада на снабжающем складе, а также C_2 соответственно стоимость хранения единицы продукции в единицу времени и постоянный спрос в единицу времени r_2 на снабжаемом складе. Кроме того, известны стоимости доставки запасов $\tilde{C}_1$ на снабжающий склад и $\tilde{C}_2$ на снабжаемый склад, а также ограничения на допустимое количество хранящейся продукции на первом складе Q_1 и на втором складе Q_2.

На первый склад при каждом пополнении доставляется количество продукции, равное ($q_1 + \tilde{q}_1$). Количество продукции q_1 должно обеспечить снабжение собственных потребителей первого склада до его следующего пополнения. Эта продукция равномерно расходуется, и её запасы заканчиваются к моменту следующей поставки.

Количество продукции $\tilde{q}_1$ должно обеспечить снабжение второго склада до следующего пополнения первого склада. Эта продукция партиями в количестве q_2 поставляется на снабжаемый склад, чтобы обеспечить его работу без дефицита запасов продукции. Количество продукции q_2 поставляемое на снабжаемый склад не должно превышать вместимости этого склада Q_2.

Сокращения расходов на хранение запасов на первом складе произойдёт, если одну партию в количестве q_2 единиц из хранящейся на нём продукции для снабжения второго склада сразу отправить на второй склад и не хранить её на первом складе. Эта партия сразу после размещения на втором складе будет расходоваться на снабжение потребителей второго склада в течение интервала времени t_2 до следующего пополнения этого склада.

Здесь следует отметить, что в случае, когда между смежными пополнениями снабжающего склада будет производиться не целое количество пополнений снабжаемого склада, то вряд ли удастся создать эффективную систему управления запасами для этих складов. Дело в том, что в этом случае перед каждым пополнением снабжающего склада на снабжаемом складе будет находиться разное количество запасов. Это приведёт к необходимости определять величину запасов на снабжаемом складе перед каждым пополнением снабжающего склада и с учётом этой величины определять пополнение снабжающего склада. В условиях постоянного спроса и двух складов, на которых хранится продукция одного типа, задача такого отслеживания запасов может решаться без особых затруднений.

Однако для снабжающего склада системы, на котором хранится продукция многих типов и с которого снабжаются несколько складов, решение подобной задачи представляет весьма непростую проблему. Для иерархической системы складов, имеющей несколько уровней со многими складами, на каждом из которых хранится продукция многих типов, решение такой задачи уже становится очень сложной проблемой.

Если же между смежными пополнениями снабжающего склада будет производиться целое количество пополнений снабжаемых складов, то после пополнениями снабжающего склада ситуация на снабжаемых складах при постоянном спросе будет повторяться. Это существенно упрощает проблему построения системы управления запасами для таких складов. Поэтому пополнение продукции на снабжаемых складах предлагается организовывать таким образом, чтобы продукция, хранимая на них, заканчивалась к моменту пополнения запасов на снабжающем складе. Время между смежными пополнениями снабжающего склада t_1 в таком случае можно представить в виде $t_1 = n_i t_i$, где n_i – целое число, которое в соответствии с приведённым выше условием для снабжающего склада должно быть больше или равно 2, т.е. $n_i \geq 2$, t_i – время между смежными пополнениями i-го снабжаемого склада.

В задаче определения оптимальных параметров управления запасами в рассматриваемой системе с двумя складами снабжающим и снабжаемым требуется определить моменты времени между смежными пополнениями запасов на этих складах, чтобы при постоянном спросе на хранящуюся продукцию обеспечить минимальные затраты на хранение и пополнение запасов и при этом обеспечить отсутствие дефицита продукции на складах.

В этом случае модель для определения указанных величин можно представить в виде.

Минимизировать функционал

$$J = \min_{t_1, t_2} \left\{ D_1(t_1) + D_2(t_2) \right\}$$

при наличии ограничений

$$q_1 + q_2(n_2 - 1) \leq Q_1, \quad q_1 + \tilde{q}_1 \leq Q_1,$$

$$r_2 t_2 \leq Q_2,$$

$$t_1 - n_2 t_2 = 0, \quad t_1 \geq 0, \quad t_2 \geq 0,$$

где $D_1(t_1)$ – расходы на хранение и пополнение запасов на первом складе, $D_2(t_2)$ – расходы на хранение и пополнение запасов на втором складе, n_2 – целочисленные переменные, t_1 – время между смежными пополнениями первого склада.

Решение такой задачи математического программирования [5] с целочисленными переменными n_2, включёнными в ограничения равенства даже для задачи с двумя складами, на которых хранится один продукт, при постоянном спросе на него вызывает достаточно большие затруднения.

Решение подобной задачи с целочисленными переменными для иерархической системы складов, в которой имеется несколько уровней, может храниться много типов продукции и снабжающие склады должны обеспечивать продукцией несколько складов на следующем уровне системы вызовет очень большие затруднения.

В связи с этим предлагается следующий эвристический алгоритм решения задач подобного типа, который не позволяет получать оптимальные параметры управления запасами, но позволяет в приемлемое время определять их приближённые значения для достаточно сложных иерархических систем складов.

Рассмотрим такой алгоритм на приведённом выше примере с двумя складами, снабжающим и снабжаемым, на которых хранится один продукт и на него имеется постоянный спрос.

Начнём определение параметров управления со второго склада. Затраты $D_2(t_2)$ на хранение и пополнение запасов в течение некоторого планируемого интервала времени T в этом случае согласно [1] можно записать следующим образом:

$$D_2(t_2) = \left(\frac{Crt_2^2}{2} + \tilde{C}\right)n = \left(\frac{Crt_2^2}{2} + \tilde{C}\right)\frac{T}{t_2} = \frac{Crt_2T}{2} + \frac{\tilde{C}T}{t_2}.$$

Вычислим величину оптимального пополнения запасов на этом складе без учёта снабжающего склада. Оптимальная величина времени t_2^* между смежными пополнениями запасов без учёта ограничения на вместимость второго склада определяется из условия минимума функции $D_2(t_2)$, который достигается при равенстве нулю производной и имеет следующий вид:

$$\frac{dD_2(t_2)}{dt_2} = \frac{C_2r_2T}{2} - \frac{\tilde{C}_2T}{t_2^2} = 0, \quad t_2^* = \sqrt{\frac{2\tilde{C}_2}{C_2r_2}}, \quad q_2^* = r_2t_2^*.$$

Это известная формула Вильсона-Харрисона [1]. Однако количество продукции q_2 поставляемое на снабжаемый склад не должно превышать вместимости этого склада Q_2. Поэтому величину q_2 целесообразно определять из условия:

$$q_2 = min\left\{r_2t^*, Q_2\right\},$$

тогда интервал времени между смежными пополнениями запасов $\breve{t}_2$ определяется из соотношения:

$$\breve{t}_2 = min\left\{t_2^*, \frac{Q_2}{r_2}\right\}. \quad (3)$$

На первый склад, как уже отмечалось выше, за одно пополнение следует доставлять ($q_1 + \tilde{q}_1$) продукции. Такое количество продукции, как уже отмечалось выше, должно храниться на первом складе без партии продукции q_2. Эту партию в количестве q_2 целесообразно сразу отправлять на второй склад для снабжения клиентов этого склада и на первом складе не хранить. Поэтому в течение первого интервала времени $\breve{t}_2$ на первом складе будет только часть храниться продукции в количестве $q_2(n_2-1)$ из продукции $\tilde{q}_1$, предназначенной для снабжения второго склада. Во второй интервала времени $\breve{t}_2$ на первом складе будет храниться продукция в количестве $q_2(n_2-2)$, поскольку одна партия размером q_2 будет отправлена на второй склад и т.д. Такой процесс будет продолжаться до (n_2-1)-го интервала времени $\breve{t}_2$, на котором будет храниться только одна партия продукции в количестве q_2. На последнем интервале времени $\breve{t}_2$ непосредственно перед пополнением первого склада на нём не хранится продукция, предназначенная для снабжения второго склада, поскольку эта продукция уже должна быть доставлена на второй склад. После пополнения первого склада весь описанный процесс повторяется.

Поэтому стоимость хранения на первом складе продукции для снабжения второго склада $\hat{D}_1$ будет равна:

$$\hat{D}_1 = C_1\left(q_2\left(n_2-1\right)t_2 + q_2\left(n_2-2\right)t_2 + ... + q_2t_2\right) = \frac{C_1q_2n_2\left(n_2-1\right)t_2}{2} = \frac{C_1r_2t_1t_2\left(n_2-1\right)}{2}.$$

Кроме этой продукции на первый склад, как уже отмечалось выше, должна быть направлена продукция в количестве q_1 для снабжения собственных потребителей первого склада до следующего пополнения склада, которое произойдёт спустя интервал времени t_1. Стоимость хранения этой продукции в течение времени t_1 при постоянном спросе r_1 будет равна:

$$\bar{D}_1 = \frac{C_1q_1t_1}{2} = \frac{C_1r_1t_1^2}{2}.$$

Тогда затраты на доставку пополнений и хранение запасов на первом складе в течение планируемого периода T можно записать с учётом условия $t_1 = n_2t_2$ в следующем виде:

$$D_1 = \left(\bar{D}_1 + \hat{D}_1 + \tilde{C}_1\right)n_1 = \left(\frac{C_1r_1t_1^2}{2} + \frac{C_1q_2n_2\left(n_2-1\right)\breve{t}_2}{2} + \tilde{C}_1\right)\frac{T}{t_1} = \frac{C_1r_1t_1T}{2} + \frac{C_1r_2t_1T}{2} - \frac{C_1r_2\breve{t}_2T}{2} + \frac{\tilde{C}_1T}{t_1}.$$

$$= \left(\frac{C_1r_1t_1^2}{2} + \frac{C_1r_2t_2\left(n_2-1\right)t_1}{2} + \tilde{C}_1\right)\frac{T}{t_1} = \frac{C_1r_1t_1T}{2} + \frac{C_1r_2t_1T}{2} - \frac{C_1r_2t_2T}{2} + \frac{\tilde{C}_1T}{t_1}$$

Поскольку величина $\breve{t}_2$ уже была вычислена будем определять величину t_1^* из условия минимума функции D_1 при известном $\breve{t}_2$. Это условие имеет вид:

$$\frac{dD_1}{dt_1} = \frac{C_1\left(r_1+r_2\right)t_1T}{2} - \frac{\tilde{C}_1T}{t_1^2} = 0, \quad t_1^* = \sqrt{\frac{2\tilde{C}_1}{C_1\left(r_1+r_2\right)}} = \sqrt{\frac{2\tilde{C}_1}{C_1R_1}},$$

где сумму $\left(r_1+r_2\right)$ удобно представить в виде $R_1 = r_1 + r_2$. Это будет полезно при выводе соотношений для иерархических систем складов.

Вместимость первого склада, как уже отмечалось выше, ограничена следующим образом:

$$q_1 + \tilde{q}_1 \le Q_1.$$

Левую часть этого ограничения с учётом выражений для q_1 и $\tilde{q}_1$ можно представить в виде:

$$q_1 + \tilde{q}_1 = r_1t_1 + q_2\left(n_2-1\right) = r_1t_1 + r_2t_2\left(n_2-1\right) = r_1t_1 + r_2t_1 - r_2t_2 = R_1t_1 - r_2t_2 \le Q_1$$

Отсюда получаем максимальную величину для времени t_1, при котором это ограничение не будет нарушено, а также величину наиболее выгодного интервала времени $\breve{t}_1$ между смежными пополнениями первого склада:

$$t_1 = \frac{Q_1 + r_2t_2}{\left(r_1+r_2\right)} = \frac{Q_1 + r_2t_2}{R_1}, \quad \breve{t}_1 = \min\left\{t_1^*, t_1\right\}.$$

После определения величин $\breve{t}_1$, и $\breve{t}_2$ необходимо произвести корректировку величины $\breve{t}_2$, если величина n_2 в ограничении $\breve{t}_1 = n_2\breve{t}_2$ не будет целой. Для этого вычисляется отношение $\tilde{n}_{12} = \dfrac{\breve{t}_1}{\breve{t}_2}$. Сначала величина n_2 полагается равной $n_{12} = \left[\tilde{n}_{12}\right]$, где $\left[\tilde{n}_{12}\right]$ обозначает целую часть числа $\tilde{n}_{12}$. После этого определяется величина $\tilde{t}_2$ из условия $\tilde{t}_2 = \dfrac{\breve{t}_1}{n_{12}}$ и производится проверка выполнения ограничения $r_2\tilde{t}_2 \le Q_2$. Если это ограничение выполняется, то корректировка и выбор величины $\tilde{t}_2$ заканчивается. В противном случае n_{12} полагается равным $n_{12} = \left[\tilde{n}_{12}\right] + 1$. С этим значением n_{12} определяется новая величина $\tilde{t}_2$ из условия $\tilde{t}_2 = \dfrac{\breve{t}_1}{n_{12}}$, которая будет меньше $\breve{t}_2$, поскольку n_{12} будет уже больше $\tilde{n}_{12}$. Поэтому ограничение $r_2\tilde{t}_2 \le Q_2$ при таком $\tilde{t}_2$ должно выполнятся.

5 Управление запасами в иерархических системах складов

Рассмотрим вывод основных соотношений для определения пополнений запасов и времени между смежными пополнениями для каждого склада в иерархической системе складов, когда спрос на продукцию, хранящуюся на каждом складе и реализуемую с него, постоянный. Более подробно постановка такой задачи управления запасами приведена в первом пункте работы.

Пополнение запасами следует организовать так, чтобы не допустить дефицита продукции на каждом складе.

Вывод этих соотношений начнём с одного из складов, находящихся на последнем уровне иерархической системы складов.

Величина спроса в единицу времени на продукцию l-го типа ($l \in L_{Nk}$) на k-м складе последнего N-го уровня системы складов, который не является снабжающим, равна спросу на эту продукцию только собственных клиентов склада r_{Nkl}. Тогда затраты $D_{Nk}\left(t_{Nk}\right)$ на хранение и пополнение запасов на k-м складе N-го уровня в течение планируемого интервала времени T согласно [3] можно представить в следующем виде:

$$D_{Nk}\left(t_{Nk}\right) = \left(\sum_{l \in J_{Nk}} \frac{C_{Nkl} r_{Nkl} t_{Nk}^2}{2} + \tilde{C}_{Nk}\right)\frac{T}{t_{Nk}} = \sum_{l \in J_{Nk}} \frac{C_{Nkl} r_{Nkl} t_{Nk} T}{2} + \frac{\tilde{C}_{Nk} T}{t_{Nk}},$$

где J_{Nk} – множество типов продукции, которая хранится на k-м складе N-го уровня системы складов, t_{Nk} – интервал времени между смежными пополнениями k-го склада N-го уровня системы, C_{Nkl} – стоимость хранения единицы продукции l-го типа на k-м складе N-го уровня системы складов в единицу времени, $\tilde{C}_{Nk}$ – стоимость доставки пополнения на k-й склад N-го уровня системы складов.

Функция $D_{Nk}\left(t_{Nk}\right)$ является строго выпуклой, непрерывно дифференцируемой функцией t_{Nk} и $\lim\limits_{t_{Nk} \to 0} D_{Nk}\left(t_{Nk}\right) \to \infty$. Из условия минимума этой функции, который определяется из условия равенства нулю этой производной, вычисляются оптимальные величины интервалов времени между смежными пополнениями склада t_{Nk}^* без учёта ограничений на вместимость склада и величины его пополнений q_{Nkl}^*

$$t_{Nk}^* = \sqrt{\frac{2\tilde{C}_{Nk}}{\sum\limits_{l \in J_{Nk}} C_{Nkl} r_{Nkl}}}, \quad q_{Nkl}^* = r_{Nkl} t_{Nk}^*.$$

Однако величина пополнения k-го склада, находящегося на N-м уровне системы складов не может превышать его вместимость Q_{Nk}, т.е. $\sum\limits_{l \in J_{Nk}} r_{Nkl} t_{Nk}^* \le Q_{Nk}$.

Поэтому интервал времени между смежными пополнениями запасов $\breve{t}_{Nk}$ на k-м складе N-го уровня системы складов, чтобы не было переполнения склада, целесообразно определять из условия:

$$\breve{t}_{Nk} = min\left\{ t^*_{Nk}, \frac{Q_{Nk}}{\sum\limits_{l \in J_{Nk}} r_{Nkl}} \right\}.$$

Здесь следует отметить, что подобные отношения получаются также для складов, которые могут находиться на разных уровнях системы складов кроме первого и последнего, но не являются снабжающими для других складов.

Определим теперь параметры управления для j-го склада $(N-1)$-го уровня такой системы складов, который является снабжающим для некоторых складов с N-го уровня системы складов. Величина спроса R_{N-1jl} в единицу времени на продукцию l-го типа на j-м складе предпоследнего $(N-1)$-го уровня системы складов, который уже является снабжающим, складывается из спроса в единицу времени собственных клиентов r_{N-1jl}, а также из спроса в единицу времени снабжаемых им складов. Поэтому величину R_{N-1jl} можно представить следующим образом:

$$R_{N-1jl} = r_{N-1jl} + \sum_{k \in I_{N-1j}} R_{Nkl},$$

где I_{N-1j} – множество складов N-го уровня системы складов, которые снабжаются с j-го склада $(N-1)$-го уровня системы складов, $R_{Nkl} = r_{Nkl}$, т.е. спрос R_{Nkl} на складе последнего уровня, который не является снабжающим, равен спросу собственных клиентов склада r_{Nkl}.

Тогда затраты $D_{N-1j}\left(t_{N-1j}\right)$ на хранение и пополнение запасов на j-м складе $(N-1)$-го уровня системы в течение планируемого интервала времени T можно вывести по аналогии с затратами $D_{Nk}\left(t_{Nk}\right)$ и вычислить оптимальные величины интервалов времени между смежными пополнениями склада t^*_{N-1n} без учёта ограничений на вместимость склада:

$$t^*_{N-1j} = \sqrt{\frac{2\tilde{C}_{N-1j}}{\sum\limits_{v \in J_{N-1j}} C_{N-1jv} R_{N-1jv}}}.$$

Величина пополнения j-го склада, находящегося на $(N-1)$-м уровне системы складов не может превышать его вместимость Q_{N-1k}, т.е. нарушать соответствующее ограничение, которое имеет вид:

$$\sum_{l \in J_{N-1j}} R_{N-1jl} \breve{t}_{N-1j} - \sum_{k \in I_{N-1j}} \sum_{v \in J_{Nk}} R_{Nkv} \breve{t}_{Nk} \le Q_{N-1j}.$$

Поэтому время между смежными пополнениями запасов на этом складе, чтобы не было дефицита продукции целесообразно определять из условия:

$$\breve{t}_{N-1j} = min\left\{ t^*_{N-1j}, \frac{Q_{N-1j} + \sum\limits_{k \in I_{N-1j}} \sum\limits_{v \in J_{Nk}} R_{Nkv} \breve{t}_{Nk}}{\sum\limits_{l \in J_{N-1j}} R_{N-1jl}} \right\}.$$

Параметры управления для i-го склада с s-го уровня системы складов $(1 < s < N-1)$ определяются по приведённой выше схеме для j-го склада $(N-1)$-го уровня и могут быть представлены в виде:

$$\breve{t}_{si} = min\left\{ t_{si}^{*}, \frac{Q_{si} + \sum\limits_{k \in I_{si}} \sum\limits_{v \in J_{si}} R_{siv} \breve{t}_{si}}{\sum\limits_{l \in J_{si}} R_{sil}} \right\},$$

где t_{si}^{*} и R_{sil} определяются из соотношений, которые получены аналогично приведенным для $(N-1)$ -го уровня системы и имеют следующий вид:

$$t_{si}^{*} = \sqrt{\frac{2\tilde{C}_{si}}{\sum\limits_{v \in J_{si}} C_{svi} R_{svi}}},\ R_{sil} = r_{sil} + \sum_{k \in I_{si}} R_{s+1il}.$$

Параметры управления для первого склада с первого уровня системы складов определяются по приведённой выше схеме могут быть представлены в виде:

$$\breve{t}_{11} = min\left\{ t_{11}^{*}, \frac{Q_{11} + \sum\limits_{k=1}^{K_2} \sum\limits_{v \in J_{si}} R_{2kv} \breve{t}_{2k}}{\sum\limits_{l \in J_{11}} R_{11l}} \right\},$$

где K_2 – количество складов на втором уровне системы, а t_{11}^{*} и R_{11l} определяются из соотношений, которые получены аналогично приведенным и имеют следующий вид:

$$t_{11}^{*} = \sqrt{\frac{2\tilde{C}_{11}}{\sum\limits_{v \in J_{11}} C_{11v} R_{11v}}},\ R_{11l} = r_{11l} + \sum_{k=1}^{K_2} R_{2kl}.$$

После определения интервалов времени $\breve{t}_{si}$ $(s = 1,..., N;\ i = 1,..., K_s)$ между смежными пополнениями запасов на всех складах системы складов производится проверка выполнения условий $\breve{t}_{si} = n_{s+1k} \breve{t}_{s+1k}$ $(s = 1,..., N-1;\ k \in I_{si})$, в которых все n_{s+1k} должны быть целыми. Проверка выполнения этих условий начинается со складов второго уровня и заканчивается на складах последнего уровня. Если в процессе проверки окажется, что равенство $\breve{t}_{si} = n_{s+1k} \breve{t}_{s+1k}$ при $k \in I_{si}$ выполняется не при целых n_{s+1k}, то производится корректировка интервалов времени между смежными пополнениями снабжаемого склада для достижения этого условия.

В процессе такой проверки вычисляются отношения $\hat{n}_{s+1k} = \dfrac{\breve{t}_{si}}{\breve{t}_{s+1k}}$ при $k \in I_{si}$, начиная с s=1 и k=1. Если при проверке k -го склада на втором уровне системы складов величина $\hat{n}_{2k}$ оказалась не целой, то сначала полагаем $n_{2k} = [\hat{n}_{2k}]$, где $[\hat{n}_{2k}]$ обозначает целую часть числа $\hat{n}_{2k}$, и определяем величину $\tilde{t}_{2k}$ из условия $\tilde{t}_{2k} = \dfrac{\breve{t}_{11}}{n_{2k}}$. Затем производится проверка выполнения ограничения $\sum\limits_{v \in J_{2k}} R_{2kv} \tilde{t}_{2k} \le Q_{2k}$. Если это ограничение выполняется, то корректировка величины $\tilde{t}_{2k}$ заканчивается. Если данное ограничение при выбранном $\tilde{t}_{2k}$ будет нарушено, то n_{2k} полагаем равным $n_{2k} = [\hat{n}_{2k}] + 1$. С этим значением n_{2k} и определяется новая величина $\tilde{t}_{2k}$ из условия $\tilde{t}_{2k} = \dfrac{\breve{t}_{11}}{n_{2k}}$, которая будет меньше $\breve{t}_{2k}$, поскольку n_{2k} будет уже больше $\hat{n}_{2k}$. Поэтому ограничение $\sum\limits_{v \in J_{2k}} R_{2kv} \tilde{t}_{2k} \le Q_{2k}$ при таком $\tilde{t}_{2k}$ должно выполнятся. Такая проверка и корректировка производится последовательно, как уже отмечалось выше, для всех снабжаемых складов системы, начиная со складов второго уровня и заканчивая складами последнего уровня.

Литература

1. *Хедли Д., Уайтин Т.* Анализ систем управления запасами. М.: Наука. 1969

2. Рыжиков Ю.И. Теория очередей и управление запасами. Учебное пособие для вузов. СПб: Издательский дом "Питер", 2001.

3. *Калинин Н.А., Хоботов Е.Н.* Модели управления многопродуктовыми запасами при постоянном спросе // АиТ. 2008. № 9. С. 156 - 169.

4. *Хоботов Е.Н.* Методы решения задач управления многопродуктовыми запасами при случайном спросе// Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 2. С. 91 – 102.

5. Хачатуров В.Р., Веселовский В.Е., Злотов А.В. и др. Комбинаторные методы и алгоритмы решения задач дискретной оптимизации большой размерности // М.: Наука, 2000.